PERIODICAL
UNIVERSITY OF HAWAII
LIBRARY
5866-171

MONATSHEFTE FÜR MATHEMATIK

NEUE FOLGE
DER MONATSHEFTE FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK
UNTER MITWIRKUNG DER
ÖSTERREICHISCHEN MATHEMATISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VON
J. RADON
WIEN

SCHRIFTLEITUNG
N. HOFREITER
WIEN

57. BAND, 1. HEFT
MIT 4 TEXTABBILDUNGEN
(AUSGEGEBEN IM MÄRZ 1953)

WIEN
SPRINGER-VERLAG
1953

Mh. Math.

Monatshefte für Mathematik

Neue Folge der Monatshefte für Mathematik und Physik

erscheinen zwanglos nach Maßgabe der eingelaufenen Arbeiten in Heften von wechselndem Umfang, die in kurzer Folge zur Ausgabe gelangen. Diese Hefte werden zu Bänden von 20—25 Bogen vereinigt. Der Preis eines Heftes richtet sich nach seinem Umfang und nach den entstandenen Herstellungskosten. Für Lieferungen in das Ausland gelten Auslandspreise.

Die für die Monatshefte für Mathematik bestimmten Manuskripte sind

an die Schriftleitung der Monatshefte für Mathematik, Mathematisches Institut der Universität Wien IX., Strudlhofgasse 4,

zu senden.

Die zum Druck angenommenen Arbeiten werden, soweit dies drucktechnisch möglich ist, nach der Reihenfolge ihres Eingangs veröffentlicht. Beiträge, welche bereits an anderer Stelle in wörtlich oder auch nur inhaltlich gleicher Fassung publiziert worden sind, können nicht aufgenommen werden. Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht.

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke kostenlos und können weitere 125 Exemplare, falls bei Rücksendung der ersten Korrektur bestellt, gegen angemessene Entschädigung geliefert erhalten.

Die Manuskripte sollen in klarer Ausdrucksweise und unter Hinweglassung jedes überflüssigen Ballastes abgefaßt sein. Von Abbildungen ist sehr sparsamer Gebrauch zu machen, da sie die Drucklegung der Beiträge verzögern und auch den Preis der Zeitschrift verteuern. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Reinzeichnungen (Beschriftung nur in Bleistift ausführen) oder in klaren verständlichen Handskizzen bestehen. Die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Springer-Verlag, Wien I, Mölkerbastei 5

Fernsprecher U 26-5-60 Serie — Telegrammadresse Springerbuch Wien

57. Band/1. Heft

Inhaltsverzeichnis

Seite

Oppenheim, A. One-sided inequalities for hermitian quadratic forms . . . 1

Höfinger, E. Über die Lösung der gewöhnlichen Laplaceschen Differentialgleichung durch mehrfache Integrale 6

Ströher, W. Zur projektiven Geometrie der Linienelemente fünfter und vierter Ordnung 19

Müller, H. R. Flächenläufige Bewegungsvorgänge im elliptischen Raum I . 29

Picone, M. Allgemeine Gesichtspunkte zur Interpolation und einige durch sie angeregte Untersuchungen 44

Prachar, K. Über ein Problem vom Waring-Goldbach'schen Typ 66

Brauner, H. Kongruente Verlagerung kollinearer Räume in achsiale Lage . 75

Buchbesprechungen 88

One-sided inequalities for hermitian quadratic forms.

By

A. Oppenheim, Singapore.

(Eingelangt am 29. März 1952)

1. Suppose that $\Phi(x, y)$ is an indefinite Hermitian binary quadratic form in variables which are integers in a quadratic field $K(\sqrt{m})$, the integer m being square-free and different from unity. In 1933 (*Oppenheim*, [3]). I obtained upper bounds for $L^2/|\Delta|$ where L is the lower bound, usually called minimum, of $|\Phi|$ for integers (x, y) of the field, not both zero, and Δ is the determinant of Φ. Attained values of upper bounds were found for all m whose prime factors satisfied certain conditions. For example if $m < 0$ and every prime factor of m is congruent to $\pm 1, \pm 5$ (mod. 24), then

$$L^2/\Delta \leqslant {}^2/_3 \mu^2 |m| \quad (\mu = \tfrac{1}{2}, m \equiv 1\,(4); \mu = 1, m \not\equiv 1),$$

the limit being attained by certain specified forms.

2. In this note I consider the question of satisfying onesided inequalities: i. e. of finding the least constant C such that the inequalities

$$0 < \Phi(x, y) \leqq C |\Delta|^{1/2}$$

can be satisfied in integers of the field. It is surprising that a precise result is obtained for *all* values of m whereas for the minimum problem there are infinitely many m for which a precise result has still to be discovered. *The least value of C is* $(4\mu^2 |m|)^{1/2}$. This value of C is needed for each form of a set which will be completely specified below. *If this set of forms be excluded, then the least value of C is at most* $(2\mu^2 |m|)^{1/2}$, *being attained when m satisfies certain congruential conditions and the form Φ belongs to a certain set.*

3. The method of proof follows the lines previsiously employed. Corresponding to the indefinite binary Hermitian quadratic form $\Phi(x, y)$ of determinant Δ in integers of the field $K(\sqrt{m})$ there is an indefinite quaternary quadratic form $f(x_1, x_2, y_1, y_2)$ of signature zero

in rational integers $x_1, \ldots, y_2$, of determinant $\mu^4 m^2 \Delta^2$. Every value of Φ is a value of f: every value of f is a value of Φ. (It is not necessarily the case that every properly represented value of f is properly represented by Φ). To obtain one-sided inequalities for Φ it is enough therefore to obtain one-sided inequalities for f.

4. Now a few years ago Davenport [2] obtained precise results for one-sided inequalities for indefinite ternary quadratic forms. The existence of such inequalities for the general n-ary quadratic form was established by Blaney [1], a student of Davenport.

Let $P_1(f_n)$ denote the lower bound of the *positive* values of f_n, an indefinite form in rational integral variables $x_1, \ldots, x_n$, of non-zero determinant $\Delta(f_n)$. Let $P_2(f_n) = P_1(-f_n)$,

$$J_1 = P_1^n / |\Delta(f_n)|, \quad J_2 = P_2^n / |\Delta(f_n)|. \tag{1}$$

In this notation, *Blaney's* theorem is this: *the upper bounds of J_1 and J_2 exist, depending only on n and on s, the signature of the form f_n.*

If these bounds are $C_1(n, s)$, $C_2(n, s)$ then *Davenport's* theorem is this:

$$C_1(3, 1) = 4 \quad , x^2 + \quad yz$$
$$C_2(3, 1) = 27/4, \; x^2 + 4\,yz$$

(equality being attained for positive multiples of the form on the right).

I have found the precise values of $C_1(n, s)$, $C_2(n, s)$ in a variety of cases in papers as yet unpublished. Thus for the purposes of this paper *we have*

$$C_1(4, 0) = 16, \; f_4/P_1 \sim xy + zt; \tag{2}$$

excluding this class of forms, we have

$$C_1(4, 0) = 81/16, \; f_4/P_1 \sim -x^2 + 4y^2 + 4zt; \tag{3}$$

exclude this class, then

$$C_1(4, 0) = 4, \; f_4/P_1 \sim xy + 2zt \text{ or } \sim xy + z^2 - t^2; \tag{4}$$

excluding these classes, then

$$C_1(4, 0) = 16/5, \; f_4/P_1 \sim xy + z^2 + zt - t^2. \tag{5}$$

Excluding all these classes we have, for $n = 4$, $s = 0$,

$$J_1 \leqslant 256/81. \tag{6}$$

5. Integers of the field $K(\sqrt{m})$ have the form

$$p = p_1 + p_2(\lambda + \mu\sqrt{m}) \tag{1}$$

where p_1 and p_2 are rational integers and

$$\lambda = \mu = \tfrac{1}{2}\,(m \equiv 1 \pmod 4), \; \lambda = 0, \mu = 1\,(m \not\equiv 1 \pmod 4). \tag{2}$$

Take the indefinite Hermitian form

$$\varphi(x, y) = (x + \widehat{\alpha}\, y)(\widetilde{x} + \alpha \widehat{y}) + \frac{\Delta}{a}\, y \widehat{y} \tag{3}$$

where

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 (\lambda + \mu \sqrt{m}) \quad (\alpha_1, \alpha_2 \text{ real}), \tag{4}$$

$\underline{a}$ is real, $\Delta < 0$ if $\underline{m} < 0$ (to make φ indefinite) and $\Delta \neq 0$ if $\underline{m} > 0$. Naturally

$$\widetilde{x} = x_1 + x_2 (\lambda - \mu \sqrt{m}).$$

Replacing x, y, α by these expressions we get a quaternary form of signature zero in rational integral variables x_1, x_2, y_1, y_2,

$$f = a (X_1^2 - \mu^2 m X_2^2) + \frac{\Delta}{a} (Y_1^2 - \mu^2 m Y_2^2), \ \Delta(f) = \mu^4 m^2 \Delta^2, \tag{5}$$

where

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1 + \lambda x_2 + (\alpha_1 + \lambda \alpha_2)(y_1 + \lambda y_2) - \mu^2 m \alpha_2 y_2 \\ X_2 &= x_2 - \alpha_2 y_1 + \alpha_1 y_2, \\ Y_1 &= y_1 + \lambda y_2, \ Y_2 = y_2. \end{aligned} \tag{6}$$

Since f and φ assume the same values it is plain that $P_1(\varphi) = P_1(f)$. Now by the theorem quoted in section 4 if we assume $J_1 = P_1^4(f)/\Delta(f) > > 256/81$, then necessarily J_1 has one of the values 16, 81/16, 4, 16/5 and f/P_1 must be equivalent to a form with integral coefficients.

If therefore

$$P_1^2(\varphi)/|\Delta(\varphi)| > \frac{16}{9} \mu^2 |m| \tag{7}$$

then necessarily $P_1^2(\varphi)/|\Delta(\varphi)|$ has one of the values

$$4\mu^2|m|, \ \frac{9}{4}\mu^2|m|, \ 2\mu^2|m|, \ \frac{4}{\sqrt{5}}\mu^2|m| \tag{8}$$

and the coefficients in f/P must be rational. But the last condition implies that $a/P, \ldots, \Delta/aP_1$ are rational and hence that Δ/P_1^2 is rational. The last value in (8) cannot therefore occur.

6. We now consider in detail

$$\frac{P_1^2}{\mu^2 m \Delta} = \frac{4}{k} \left(k = \pm 1, \ \pm \frac{16}{9}, \pm 2\right) \tag{1}$$

where $k > 0$ if $m < 0$ and $k\Delta > 0$ if $m > 0$.

The coefficients of x_1^2, $x_1 y_1$, $x_1 y_2$, y_1^2 in f are

$$a = P_1 u,\ 2a\beta_1 = P_1 v,\ 2a(\lambda\beta_1 - \mu m\beta_2) = P_1 r, \tag{2}$$

$$a(\beta_1^2 - m\beta_2^2) + \frac{\Delta}{a} = P_1 t$$

where (for brevity) we write

$$\beta_1 = \alpha_1 +_1 \lambda\alpha_2,\ \beta_2 = \mu\alpha_2 \tag{3}$$

The numbers u, v, r, t are rational integers if (6 . 1) *holds*. Write

$$w = (\lambda v - r)/\mu \tag{3}$$

so that w is a rational integer. Then the rational integers u, v, w, t satisfy the Diophantine equation

$$v^2 - \frac{w^2 - k\mu^{-2}}{m} = 4ut\ . \tag{4}$$

This equation is always solvable if $k = +1$.

It is solvable for $k = -1$ (so that $m > 0$ and $\Delta < 0$) if and only if the prime factors of m are selected from 2, 5, 13, 17, ..., (i. e. if m is a sum of two squares).

It is solvable for $k = \pm 2$ if $m = x^2 \mp 2y^2$ for integral x and y.

The Diophantine equation is never solvable if $k = \pm 16/9$.

It is easily verified that with integers u, v, w, t chosen to satisfy the equation (when solvable) r will be integral and the remaining coefficients of f/P_1 will also be integral.

The form $F = f/P$ so found has $\Delta(F) = 1/16$ or $1/4$. Its coefficients are integers so that $P_1(F)$ is an integer which is at least 1. But $P_1(F) \geqq 2$ would yield

$$P_1^4(F)/\Delta(F) \geqq 64$$

contrary to (4 . 2). Thus it follows that in the solvable cases of the Diophantine equation (6 . 4), any of the forms

$$\varphi_0 = u x\bar{x} + \tfrac{1}{2} v(x\bar{y} + \bar{x}y) + \frac{w}{2v\sqrt{m}}(x\bar{y} - \bar{x}y) + t y\bar{y} \tag{5}$$

will have $P_1(\varphi_0) = 1$.

We have therefore proved the following:

Theorem. If $\varphi(x, y)$ is an indefinite Hermitian form in the field $K(\sqrt{m})$ then the inequalities

$$0 < \varphi(x, y) \leqq {}^4/_3(\mu^2 \mid m\Delta \mid)^{1/2}$$

are always solvable in integers x, y of the field except when φ is a positive multiple of any of the forms φ_0.

For $k = +1$ these forms exist for every m and have the property that

$$P_1(\varphi_0) = 2 \mid \mu^2 m \Delta \mid^{1/2} \quad (m \Delta > 0).$$

If $k = -1$ *these forms exist only when* m *is a sum of two squares and* $\Delta < 0$ *and have the property that*

$$P_1(\varphi_0) = 2 \mid \mu^2 m \Delta \mid^{1/2}$$

If $k = +2$, *these forms exist when* $m = a^2 - 2b^2$ *for rational integers* a *and* b *and have the property that*

$$P_1(\varphi_0) = \mid 2 \mu^2 m \Delta \mid^{1/2} \quad (m \Delta > 0).$$

If $k = -2$, *these forms exist when* $m = a^2 + 2b^2$ *and* $\Delta < 0$ *and have the property that*

$$P_1(\varphi_0) = \mid 2 \mu^2 m \Delta \mid^{1/2}.$$

It will be observed that the best value of C such that

$$0 < \varphi(x, y) \leqq C \mid \Delta \mid^{1/2}$$

is solvable in integers x, y of the field $K(\sqrt{m})$ has been found (*i*) when the field is imaginary (for then $m < 0$, $\Delta < 0$, $k > 0$) for *all* m, (*ii*) when the field is real and $\Delta > 0$ (since then $m > 0$, $k > 0$) for *all* m, (*iii*) even for real fields and forms φ with $\Delta < 0$ (so that $k < 0$) provided that $m = a^2 + b^2$ or $m = a^2 + 2b^2$.

Thus for the field $K(\sqrt{7})$ we fail to obtain an exact bound when Φ has a *negative* determinant although we succeed when φ has a positive determinant.

7. It would be interesting to determine in the general case how many classes of forms φ_0 arise from the Diophantine equation (6 . 4). Thus for $m = -1, -2, 2$ (in each of which the class number is unity) only one class of forms φ_0 arises when $k = 1$. But what happens for general m and $k = \pm 1, \pm 2$. I do not know.

References.

[1] *H. Blaney:* Indefinite quadratic forms in n variables, Journal London Math. Soc., 23 (1948), 153—160.

[2] *H. Davenport,* On indefinite ternary quadratic forms, Proc. London Math. Soc., (2), 51 (1949), 145—160.

[3] *A. Oppenheim:* The lower bounds of Hermitian quadratic forms in any quadratic field, Proc. London Math. Soc., (2), 40 (1936), 541—555.

Über die Lösung der gewöhnlichen Laplaceschen Differentialgleichung durch mehrfache Integrale.

Von

E. Hlöfinger, Wien.

(Eingelangt am 5. Juni 1952.)

Zwischen der Behandlung der verallgemeinerten hypergeometrischen Differentialgleichung n-ter Ordnung mit zwei endlichen singulären Punkten und der gewöhnlichen Laplaceschen Differentialgleichung mit linearen Koeffizienten besteht eine weitgehende Analogie. Die gleiche Bedeutung, welche die Mellin-Transformation für die Lösung der hypergeometrischen Differentialgleichung besitzt, kommt der Laplace-Transformation für die Lösung der Laplaceschen Differentialgleichung zu. Durch Mellin-Faltung zweier hypergeometrischer Funktionen entsteht wieder eine hypergeometrische Funktion[1]; speziell ergibt sich hieraus die Möglichkeit, die hypergeometrische Differentialgleichung durch mehrfache Integrale zu lösen. In der folgenden Arbeit soll das entsprechende für die Lösungen Laplacescher Differentialgleichungen gezeigt werden, daß man durch Laplace-Faltung zweier Lösungen Laplacescher Differentialgleichungen wieder die Lösung einer Laplaceschen Differentialgleichung bekommt. Durch wiederholte Anwendung ergibt sich hieraus eine Lösung der Laplaceschen Differentialgleichung durch mehrfache Integrale, im besonderen bekommt man Integrale, welche den Goursat-Pochhammerschen mehrfachen Integralen der Theorie der hypergeometrischen Funktionen entsprechen. Die folgenden Beweise sind vielfach gleichlaufend zu den in der Arbeit des Verfassers „Zur Theorie der hypergeometrischen Funktionen"[2] durchgeführten.

---

[1] *Hj. Mellin*: Abriß e. einheitlichen Theorie d. Gamma- u. d. hypergeometrischen Funktionen, Math. Ann. **68**, 305—337 (1910), insb. 336.

[2] Monatsh. Math. **56**, 126—136 (1952).

1.

Ist $y = {}_p f_q(x)$ eine partikuläre analytische Lösung der Differentialgleichung[3]

$$[D_1(d+\varrho_1)(d+\varrho_2)\dots(d+\varrho_q)+C_1 x(d+\alpha_1)(d+\alpha_2)\dots(d+\alpha_p)]\,y=0 \quad (1)$$

$$\left(d=\frac{d}{dx}\right)$$

und $y = {}_m g_n(t)$ eine partikuläre analytische Lösung der Differentialgleichung

$$[D_2(d-\sigma_1)(d-\sigma_2)\dots(d-\sigma_n)+(-1)^{m+n+1} C_2 t(d-\beta_1)(d-\beta_2)\dots \dots(d-\beta_m)]\,y=0 \quad (2)$$

so ist das Integral

$$J(x) = \text{const.} \int_{t_1}^{t_2} {}_m g_n(t)\, {}_p f_q(x+t)\,dt \quad (3)$$

falls es existiert, eine partikuläre analytische Lösung der Differentialgleichung*

$$[D_1 C_2 (d+\varrho_1)\dots(d+\varrho_q)(d+\beta_1)\dots(d+\beta_m)+D_2 C_1 (d+\alpha_1)\dots \dots(d+\alpha_p)(d+\sigma_1)\dots(d+\sigma_n)+C_1 C_2 x(d+\alpha_1)\dots(d+\alpha_p) (d+\beta_1)\dots(d+\beta_m)]\,y=0 \quad (4)$$

Als Grenzen sind die singulären Stellen des Integranden so zu wählen, daß die bei den später durchzuführenden partiellen Integrationen auftretenden Zusatzglieder zum Verschwinden gebracht werden können.

Der Beweis ergibt sich sofort, indem man in der Gleichung

$$D_1 C_2 \int_{t_1}^{t_2} [(d-\beta_1)\dots(d-\beta_m)\, {}_m g_n(t)]\,[(d+\varrho_1)\dots(d+\varrho_q)\, {}_p f_q(x+t)\,dt$$

$$+C_1 C_2\, x \int_{t_1}^{t_2} [(d-\beta_1)\dots(d-\beta_m)\, {}_m g_n(t)]\,[(d+\alpha_1)\dots(d+\alpha_p)\, {}_p f_q(x+t)\,dt$$

$$+C_1 C_2 \int_{t_1}^{t_2} t\,([d-\beta_1)\dots(d-\beta_m)\, {}_m g_n(t)]\,[(d+\alpha_1)\dots(d+\alpha_p)\, {}_p f_q(x+t)\,dt$$

---

[3] Die Größen C_1, D_1 bzw. C_2, D_2 sind Konstante.

* Zusatz während der Korrektur: Dies befindet sich bereits in der Arbeit von *Hj. Mellin:* Über gewisse durch bestimmte Integrale vermittelte Beziehungen zwischen Differentialgleichungen mit rationalen Koeffizienten, Acta Soc. Sci. Fennicae, Bd. **21**, Nr. 6 (1896), insb. S. 50. Ebenso wurde Formel (4) in der Arbeit des Verfassers „Zur Theorie der hypergeometrischen Funktionen", Mh. Math. **56**, 126—136 (1952) bereits von *Hj. Mellin* in obiger Arbeit aus der verallgemeinerten hypergeometrischen Differentialgleichung in etwas anderer Gestalt hergeleitet. (Insb. S. 39).

im dritten Integral Gl. (2) anwendet und in jedem Integral partiell nach ${}_m g_n(t)$ gemäß

$$\int_{t_1}^{t_2} [(d-a_1)\dots(d-a_r)\,g(t)]\,[(d+b_1)\dots(d+b_s)\,f(x+t)\,dt =$$

$$= \varphi[g(t), f(x+t)]\,|_{t_1}^{t_2} + (-1)^r \int_{t_1}^{t_2} g(t)\,[d+a_1)\dots(d+a_r)\,(d+b_1)\dots(d+b_s)$$
$$f(x+t)]\,dt$$

integriert und beachtet, daß $d_t f(x+t) = d_x f(x+t)$ ist

$$(d_t = \frac{d}{dt},\quad d_x = \frac{d}{dx}).$$

Ist umgekehrt eine Differentialgleichung

$$[E_1(d+b_1)\dots(d+b_r) + C_1 C_2\,x(d+a_1)\dots(d+a_p)(d+\beta_1)\dots(d+\beta_m)]\,y = 0 \tag{5}$$

gegeben und zerlegt man $E_1(d+b_1)\dots(d+b_r)$ in

$$E_1(d+b_1)\dots(d+b_r) = C_1 D_2(d+\sigma_1)\dots(d+\sigma_n)(d+\alpha_1)\dots(d+\alpha_p) +$$
$$+ C_2 D_1(d+\varrho_1)\dots(d+\varrho_q)(d+\beta_1)\dots(d+\beta_m)$$

welche Zerlegung, falls die Polynome $(z+\alpha_1)\dots(z+\alpha_p)$, $(z+\beta_1)\dots(z+\beta_m)$ teilerfremd sind, stets möglich ist, so genügt das Integral (3), falls es existiert, der Gleichung (5), wobei ${}_p f_q(x)$ und ${}_m g_n(t)$ Lösungen der Gleichungen (1) bzw. (2) sind.

Als Integrationsgrenzen kommen die singulären Stellen der Differentialgleichungen (1), (2) in Betracht. Die allgemeinste Laplacesche Differentialgleichung (1) ($p \lessgtr q$) besitzt $x = \infty$ immer als Unbestimmtheitsstelle, während im Falle $q < p$ bzw. $q = p$ noch die Punkte $x = 0$ bzw. $x = -\dfrac{D_1}{C_1}$ einfache singuläre Stellen der Bestimmtheit sind (nur ein einziges der zu $x = 0$ gehörigen Lösungen verzweigt sich bestimmt). Für $x = \infty$ wird die Differentialgleichung formal durch normale bzw. anormale Reihen befriedigt. Es soll nun gezeigt werden, daß die Differentialgleichung (1) durch Vorgabe der Gestalt der sie an den singulären Stellen befriedigenden Reihen eindeutig bestimmt werden kann. Da der Fall $p = q$ durch Einführung einer neuen Veränderlichen $z = D_1 + C_1 x$ auf den Fall $q < p$ zurückgeführt werden kann, genügt es, die Fälle $q < p$, $q > p$ zu betrachten.

1. $q < p$. In diesem Falle ist (1) die einzige lineare Differentialgleichung mit rationalen Koeffizienten, welche $x = 0$ als einfache Stelle der Bestimmtheit besitzt und für $x = \infty$ formal durch Reihen

$$T_i(x) = e^{-\alpha_i x}\, x^{\gamma_i}\, Q_i(1/x) \qquad (i = 1, 2, \ldots, p) \tag{6}$$

$$\gamma_i = -\frac{D_1}{C_1} \frac{\prod_{j=1}^{q} (\varrho_j - \alpha_i)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{p} (\alpha_j - \alpha_i)} \tag{7}$$

befriedigt wird. Es soll dabei noch vorausgesetzt werden, daß die Größen $-\alpha_1, -\alpha_2 \ldots -\alpha_p$ verschieden sind. Die Koeffizienten in den Reihen $Q_i(1\ x)$ sind dann durch die Größen $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_q, \alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_p$ eindeutig bestimmt.

Zufolge der Voraussetzungen kann die Differentialgleichung nur die Gestalt

$$[E_1 (d + r_1) \ldots (d + r_s) + F_1\, x\, (d + a_1) \ldots (d + a_p)]\, y = 0 \tag{8}$$
$$s \leqq p - 1$$

besitzen. Es ist jedoch vorteilhafter, an Stelle von $d = \frac{d}{dx}$ den Operator

$\mathfrak{d} = x\frac{d}{dx} = \frac{d}{d \log x}$ einzuführen. Zufolge der Eigenschaften

$$1.\ \mathfrak{d}\,[x^a f(x)] = x^a (\mathfrak{d} + a) f(x) \tag{9}$$
$$2.\ \mathfrak{d}\,[e^{g(x)} (f(x)] = e^{g(x)} (\mathfrak{d} + x\, g'(x)) f(x)$$

nimmt (8) die Gestalt

$$[E_1 x^{p-s-1} (\mathfrak{d} - (s-1) + r_1 x)(\mathfrak{d} - (s-2) + r_2 x) \ldots (\mathfrak{d} + r_s x) + \\ + F_1 (\mathfrak{d} - (p-1) + a_1 x) \ldots (\mathfrak{d} + a_p x)]\, y = 0 \tag{10}$$

an. Setzt man $y = e^{cx} \sum_{i=0}^{\infty} d_i\, x^{\gamma - i}$ ein (gemäß (9)):

$$\sum_{i=0}^{\infty} d_i\, x^{\gamma-i} [E_1 x^{p-s-1} (\mathfrak{d} - (s-1) + \gamma - i + (c + r_1) x) \ldots (\mathfrak{d} + \gamma - i + (c + r_s) x) + \\ + F_1 (\mathfrak{d} - (p-1) + \gamma - i + (c + a_1) x) \ldots (\mathfrak{d} + \gamma - i + (c + a_p) x)](1) = 0 \tag{11}$$

so ergibt Nullsetzen des Koeffizienten von $x^{\gamma+p}$ bzw. $x^{\gamma+p-1}$

$$(c + a_1)(c + a_2) \ldots (c + a_p) = 0$$

$$E_1 \prod_{j=1}^{s} (c + r_j) + F_1 \gamma \sum_{k=1}^{p} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{p} (c + a_j) = 0$$

somit wegen (6) $a_i = \alpha_i\ (i = 1, 2, \ldots, p)$ und durch Einsetzen von $c = -\alpha_i\ (i = 1, 2, \ldots, p)$ in die zweite Gleichung:

$$\gamma_i = -\frac{E_1}{F_1} \frac{\prod_{j=1}^{s} (r_j - \alpha_i)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{p} (\alpha_j - \alpha_i)}.$$

Zufolge (7) muß daher $\frac{D_1}{C_1} \prod_{j=1}^{q} (\varrho_j - \alpha_i) = \frac{E_1}{F_1} \prod_{j=1}^{s} (r_j - \alpha_i) \quad (i = 1, 2, \ldots p)$ sein, das Polynom höchstens $p - 1$. Grades

$$\frac{D_1}{C_1} \prod_{j=1}^{q} (z + \varrho_j) - \frac{E_1}{F_1} \prod_{j=1}^{s} (z + r_j)$$

verschwindet somit identisch, da es die p verschiedenen Wurzeln $-\alpha_1, -\alpha_2 \ldots -\alpha_p$ besitzt, so daß $s = q$, $E_1 = D_1$. $F_1 = C_1$ (o. B. d. A.), $r_j = \varrho_j$ $(j = 1, 2, \ldots, q)$ ist.

Die zu $x = 0$ gehörige determinierende Fundamentalgleichung bekommt man nach Einsetzen von $y = \sum_{i=0}^{\infty} d_i x^{\gamma+i}$ in (10) ($s = q$, $E_1 = D_1$, $F_1 = C_1$, $r_j = \varrho_j$) durch Nullsetzen des Koeffizienten von x^γ

$$\text{für } q = p - 1 \quad \gamma(\gamma - 1) \ldots (\gamma - (p-2))(\gamma - (p-1) + \frac{D_1}{C_1}) = 0 \tag{12}$$

$$\text{für } q < p - 1 \quad \gamma(\gamma - 1) \ldots (\gamma - (p-1)) = 0$$

Im Falle $q = p - 1$ verhält sich somit das an der Stelle $x = 0$ verzweigte Integral im allgemeinen wie

$$y(x) = x^{-\frac{D_1}{C_1} + p - 1} Q(x)$$

während für $q < p - 1$ stets Logarithmen auftreten müssen, da $x = 0$ höchstens außerwesentlich singulärer Punkt der Differentialgleichung sein kann ($x = 0$ ist immer singulär), in welchem Falle die determinierende Fundamentalgleichung jedoch nicht die Gestalt (12) besitzen kann[4].

2. $q > p$. Die Differentialgleichung (1) kann hier als die einzige lineare Differentialgleichung mit rationalen Koeffizienten charakterisiert werden, die $x = \infty$ als einzigen singulären Punkt besitzt und hier formal durch Reihen

[4] *L. Schlesinger*: Handbuch d. Theorie d. linearen Differentialgleichungen, Bd. 1, 201 (1895).

$$T_i(x) = e^{-\alpha_i x}\, x^{\gamma_i}\, Q_i(1/x) \qquad (i = 1, 2, \ldots, p)$$

$$T_{p+j}(x) = e^{\exp.}\left(c_0^j \frac{(q-p)\, x^{\frac{q-p+1}{q-p}}}{q-p+1} + c_1^j x + c_2^j \frac{(q-p)\, x^{\frac{q-p-1}{q-p}}}{q-p-1} + \right.$$

$$\left. + \ldots + c_{q-p}^j (q-p\, x^{\frac{1}{q-p}})\, x^{\delta_j}\, \bar{Q}_j(1/x) \right) \qquad (j = 1, 2, \ldots q-p) \qquad (13)$$

$$\gamma_i = -\frac{D_1}{C_1} \frac{\prod_{j=1}^{q} (\varrho_j - \alpha_i)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{p} (\alpha_j - \alpha_i)}$$

gelöst wird. Die Reihen $Q_i(1/x)$ $(i=1,2,\ldots p)$ bzw. $\bar{Q}_j(1/x)$ $(j=1,2,\ldots q-p)$ schreiten nach ganzen Potenzen von $1/x$ bzw. $(1/x)^{\frac{1}{q-p}}$ fort. Die Größen $-\alpha_1, -\alpha_2 \ldots -\alpha_p, \varrho_1, \varrho_2 \ldots \varrho_q$ sind willkürlich wählbar ($-\alpha_1, -\alpha_2 \ldots -\alpha_p$ sollen verschieden sein), während sich $c_0^j, c_1^j \ldots c_{q-p}^j$ $(j = 1, 2, \ldots q-p)$ durch Nullsetzen der $q-p+1$ höchsten Koeffizienten in der Gleichung

$$D_1 \prod_{k=1}^{q} (c_0 z^{q-p} + (c_1 + \varrho_k) z^{q-p-1} + c_2 z^{q-p-2} + \ldots + c_{q-p}) +$$

$$+ C_1 z^{(q-p)^2} \prod_{k=1}^{p} (c_0 z^{q-p} + (c_1 + \alpha_k) z^{q-p-1} + c_2 z^{q-p-2} + \ldots + c_{q-p}) \qquad (14)$$

ergeben sollen; es muß etwa

$$D_1 c_0^{q-p} + C_1 = 0$$

$$c_1^j = \frac{1}{q-p} \left(\sum_{k=1}^{p} \alpha_k - \sum_{k=1}^{q} \varrho_k \right) = c_1$$

$$c_2^j = -\frac{1}{(q-p)\, c_0^j} \left\{ \sum_{k=1}^{p-1} \sum_{l=k+1}^{p} (c_1+\alpha_k)(c_1+\alpha_l) - \sum_{k=1}^{q-1} \sum_{l=k+1}^{q} (c_1+\varrho_k)(c_1+\varrho_l) \right.$$

$$c_3^j = \frac{1}{q-p} \left\{ (p-1) \sum_{k=1}^{p} \frac{(c_1+\alpha_k)}{c_0^j} - (q-1) \sum_{k=1}^{q} \frac{(c_1+\varrho_k)}{c_0^j} + \right.$$

$$+ \sum_{k=1}^{p-2} \sum_{l=k+1}^{p-1} \sum_{m=l+1}^{p} \frac{(c_1+\alpha_k)(c_1+\alpha_l)(c_1+\alpha_m)}{(c_0^j)^2} - \sum_{k=1}^{q-2} \sum_{l=k+1}^{q-1} \sum_{m=l+1}^{q} \left. \left. \frac{(c_1+\varrho_k)(c_1+\varrho_l)(c_1+\varrho_m)}{(c_0^j)^2} \right\} \right\}$$

$(j = 1, 2, \ldots, q-p)$ sein.

Es soll nur der Fall $q = p+1$ betrachtet werden, die Behandlung des allgemeinen Falles kann entsprechend durchgeführt werden. Zufolge (13) ist die Differentialgleichung vom Range zwei (im allgemeinen Fall höchstens vom Range zwei), sie besitzt somit notwendig die Gestalt

$$[E_0(d+a_1)\ldots(d+a_q)+E_1 x(d+b_1)\ldots(d+b_{t_1})+E_2 x^2(d+c_1)\ldots(d+c_{t_2})+ \\ +\ldots+E_q x^q]\,y=0$$

$$t_i \leqq q-i \qquad (i=1,2,\ldots q),\ q=p+1,$$

bzw. $\mathfrak{d} = x\dfrac{d}{dx}$

$$[E_0(\mathfrak{d}-(q-1)+a_1 x)\ldots(\mathfrak{d}+a_q x)+E_1 x^{q-t_1+1}(\mathfrak{d}-(t_1-1)+b_1 x)\ldots(\mathfrak{d}+ \\ +b_{t_1}x)+E_2 x^{q-t_2+2}(\mathfrak{d}-(t_2-1)+c_1 x)\ldots(\mathfrak{d}+c_{t_2}x)+\ldots+E_q x^{2q}]\,y=0 \tag{15}$$

Setzt man hier $y = e^{cx}\sum\limits_{i=0}^{\infty} d_i x^{\gamma-i}$ entsprechend zu (11) ein, so muß der Koeffizient der höchsten Potenz die charakteristische Gleichung vom Grade p in c mit den Wurzeln $-a_1, -a_2 \ldots -a_p$ ergeben. Es muß daher $E_2 = E_3 = \ldots = E_q = 0$, $t_1 = p$, $b_i = a_i$ $(i = 1, 2, \ldots p)$ sein. (i. a. F. $E_{q-p+1} = E_{q-p+2} = \ldots = E_q = 0$; falls $E_{q-p} \neq 0$ ist. ist der zugehörige Operator eindeutig bestimmt). Wird in (15)

$$y = e^{\frac{c_0 x^2}{2}+c_1 x}\sum_{i=0}^{\infty} d_i x^{\gamma-i}$$

eingesetzt,

$$\sum_{i=0}^{\infty} d_i x^{\gamma-i}\,[E_0\prod_{k=1}^{q}(\mathfrak{d}-(q-k)+\gamma-i+(c_1+a_k)x+c_0 x^2)+ \\ +E_1 x^2\prod_{k=1}^{p}(\mathfrak{d}-(p-k)+\gamma-i+(c_1+a_k)x+c_0 x^2)]\,(1)=0$$

(Im allgemeinen Falle ist es zweckmäßig, in (15) die neue Variable z durch $x = z^{q-p}$ gemäß $\mathfrak{d}_x = \dfrac{1}{q-p}\mathfrak{d}_z$ einzuführen und dann

$$y = e\exp.\,(c_0\frac{(q-p)z^{q-p+1}}{(q-p+1)}+c_1 z^{q-p}+c_2\frac{(q-p)z^{q-p-1}}{q-p-1}+\ldots+ \\ +c_{q-p}(q-p)z)\sum_{i=0}^{\infty} d_i z^{\gamma-i}$$

einzusetzen, wobei sich dann durch Koeffizientenvergleich $E_2 = E_3 = \ldots = E_{q-p} = 0$ ergibt), so können durch Nullsetzen der Koeffizienten von $x^{\gamma+2q}$, $x^{\gamma+2q-1}$ die Größen c_0, c_1 berechnet werden. Es

genügt hierfür, dies für die zwei höchsten Koeffizienten des Polynoms

$$E_0 \prod_{k=1}^{p+1} [(c_1 + a_k)\, x + c_0\, x^2] + E_1\, x^2 \prod_{k=1}^{p} [(c_1 + a_k)\, x + c_0\, x^2]$$

bzw. für

$$E_0 \prod_{k=1}^{p+1} (c_1 + a_k + c_0\, x) + E_1\, x \prod_{k=1}^{p} (c_1 + a_k + c_0\, x)$$

durchzuführen. Somit muß wegen (14)

$$E_0 = D_1,\ E_1 = C_1,\ \sum_{k=1}^{p+1} (c_1 + a_k) = \sum_{k=1}^{p+1} (c_1 + \varrho_k) \tag{16}$$

erfüllt sein. Da sich genau wie für $p < q$

$$\prod_{j=1}^{p+1} (\varrho_j - \alpha_i) = \prod_{j=1}^{p+1} (\alpha_j - \alpha_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots p)$$

ergibt, besitzt das Polynom

$$\prod_{j=1}^{p+1} (z + c_1 + \varrho_j) - \prod_{j=1}^{p+1} (z + c_1 + a_j) \tag{17}$$

welches wegen (16) vom Grade $p-1$ ist, p verschiedene Wurzeln $-c_1-\alpha_1, -c_1-\alpha_2 \ldots -c_1-\alpha_p$, so daß $a_j = \varrho_j$ $(j = 1, 2, \ldots p+1)$ ist. (Im allgemeinen Fall ergibt sich (17) $(p+1 \to q)$ ebenfalls vom Grade $p-1$ mit den Wurzeln $-c_1-\alpha_i$ $(i = 1, 2, \ldots p)$, d. h. $a_j = \varrho_j$).

2.

Um die den *Goursat-Pochhammer*schen mehrfachen Integralen der Theorie der hypergeometrischen Funktionen entsprechenden Integrale zu bekommen, muß man nur in der Differentialgleichung

$$[D_1 (d+\varrho_1)(d+\varrho_2)\ldots(d+\varrho_q) + x\,(d+\alpha_1)(d+\alpha_2)\ldots(d+\alpha_p)]\, y = 0$$
$$q < p \qquad \alpha_i \neq \alpha_j \text{ für } i \neq j \tag{18}$$

$A(d) = D_1 (d+\varrho_1)(d+\varrho_2)\ldots(d+\varrho_q)$ in die Lagrangesche Reihe

$$A(d) = \sum_{i=1}^{p} a_i (d+\alpha_1)\ldots(d+\alpha_{i-1})(d+\alpha_{i+1})\ldots(d+\alpha_p)$$

$$a_i = \frac{A(-\alpha_i)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{p} (\alpha_j - \alpha_i)} = -\gamma_i$$

entwickeln und bekommt etwa eine Lösung

$$y = \text{const.}\, e^{-a_p x} \int\limits_{(0,\infty)_1} e^{(a_1-a_p)t_1} t_1^{-a_1} \int\limits_{(0,\infty)_2} e^{(a_2-a_p)t_2} t_2^{-a_2} \dots$$

$$\dots \int\limits_{(0,\infty)_{p-1}} e^{(a_{p-1}-a_p)t_{p-1}}\; t_{p-1}^{-a_{p-1}} (t_1+t_2+\dots+t_{p-1}+x)^{-a_p} dt_1 \dots dt_{p-1}$$

wobei falls $(0,\infty)_i$ $(i = 1, 2, \dots p-1)$ eine Schleife um den Punkt $t_i = 0$ längs der positiv reellen Achse ist, $\mathrm{Re}\,(a_i - a_p) < 0$, $-a_i \neq \neq 0, 1, 2, \dots$ $(i = 1, 2, \dots p-1)$ sein muß.

Dies ergibt sich sofort durch wiederholtes Anwenden von (5), indem man für ${}_1g_0^{(i)}(t_i)$ $(i = 1, 2, \dots p-1)$ die Lösung der Differentialgleichung

$$[a_i + t_i (d - a_i)]\, y = 0$$

nimmt. Allgemein wird man in

$$y_1(x) = \text{const.} \int\limits_{(-x,\infty)} e^{a_1 t}\, t^{-a_1}\, f^{(1)}(x+t)\, dt$$

$$y_i(x) = \text{const.} \int\limits_{(0,\infty)} e^{a_1 t}\, t^{-a_1}\, f^{(i)}(x+t)\, dt \qquad (i=2,3\dots p)$$

ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung (18) bekommen, falls für $f^{(i)}(x+t)$ $(i = 2, 3, \dots p)$ jenes Fundamentalsystem der Differentialgleichung

$$[\sum_{j=2}^{p} a_j (d+\alpha_2) \dots (d+\alpha_{j-1})(d+\alpha_{j+1}) \dots (d+\alpha_p) +$$

$$+ (x+t)(d+\alpha_2) \dots (d+\alpha_p)]\, y = 0$$

genommen wird, für welche für große $|t|$ des Integrationsweges

$$f^{(i)}(x+t) \asymp e^{-a_i (x+t)} (x+t)^{\gamma_i} Q_i (1/x+t)$$

$\mathrm{Re}\,(a_1 - a_i)\, t < 0$ $(i = 2, 3, \dots p)$ ist, und für $f^{(1)}(x+t)$ ein an der Stelle $t = -x$ verzweigtes Integral genommen wird.

Im Falle $p = 3$ ergibt sich so ein mögliches Fundamentalsystem:

$$y_1(x) = \text{const.}\, e^{-a_3 x} \int\limits_{(-x,\infty)} e^{(a_1-a_3)t_1} t_1^{-a_1} \int\limits_{(0,\infty)} e^{(a_2-a_3)t_2} t_2^{-a_2} (t_1+t_2+x)^{-a_3} dt_1 dt_2$$

$\mathrm{Re}\,(a_1 - a_3)\, t_1 < 0$, $\mathrm{Re}\,(a_2 - a_3)\, t_2 < 0$ $(|t_1|, |t_2| \gg 1)$, $-a_2, -a_3 \neq \neq 0, 1, 2 \dots$ (nur für $-a_3 \neq 0, 1, 2, \dots$ ist $\int\limits_{(0,\infty)} \dots dt_2$ für $t_1 = -x$ verzweigt)

$$y_2(x) = \text{const.}\, e^{-a_3 x} \int\limits_{(-x,\infty)} e^{(a_2-a_3)t_1} t_1^{-a_2} \int\limits_{(0,\infty)} e^{(a_1-a_3)t_2} t_2^{-a_1} (t_1+t_2+x)^{-a_3} dt_1 dt_2.$$

$\mathrm{Re}\,(a_2 - a_3)\, t_1 < 0$, $\mathrm{Re}\,(a_1 - a_3)\, t_2 < 0$, $-a_1, -a_3 \neq 0, 1, 2 \dots$

$$y_3(x) = \text{const.}\, e^{-a_3 x} \int\limits_{(0,\infty)} e^{(a_1-a_3)t_1} t_1^{-a_1} \int\limits_{(0,\infty)} e^{(a_2-a_3)t_2} t_2^{-a_2} (t_1+t_2+x)^{-a_3} dt_1 dt_2.$$

$\mathrm{Re}\,(\alpha_1 - \alpha_3)\,t_1 < 0$, $\mathrm{Re}\,(\alpha_2 - \alpha_3)\,t_2 < 0$, $-\alpha_1, -\alpha_2 \neq 0, 1, 2 \ldots$
Die asymptotischen Entwicklungen dieser Integrale bekommt man sofort, z. B. für $y_1(x)$, indem an Stelle von t_1 die Integrationsveränderliche $t_1 - x$ eingeführt wird:

$$y_1(x) = \text{const.}\, e^{-\alpha_1 x}\, x^{-\alpha_1} \int\limits_{(0,\infty)} e^{(\alpha_1-\alpha_3)t_1} \left(\frac{t_1 - x}{x}\right)^{-\alpha_1} \int\limits_{(0,\infty)} e^{(\alpha_2-\alpha_3)t_2}\, t_2^{-\alpha_2}$$
$$(t_1 + t_2)^{-\alpha_3}\, dt_1\, dt_2$$

Das hier auftretende Integral ist innerhalb des Sektors

$$\frac{\pi}{2} - \arg(\alpha_1 - \alpha_3) < \arg . \, x < \frac{7\pi}{2} - \arg(\alpha_1 - \alpha_3)$$

asymptotisch nach ganzen Potenzen von $1/x$ entwickelbar, sodaß

$$y_1(x) \approx \frac{\text{const.}\, e^{-\pi i\, a_1}}{\Gamma(a_1)}\, e^{-\alpha_1 x}\, x^{-\alpha_1} \sum_{j=0}^{\infty} c_j\, x^{-j}$$

$$c_j = \frac{\Gamma(a_1 + j)}{\Gamma(j+1)} \int\limits_{(0,\infty)} \int\limits_{(0,\infty)} e^{(\alpha_1-\alpha_3)t_1}\, e^{(\alpha_2-\alpha_3)t_2}\, t_1^j\, t_2^{-\alpha_2}\, (t_1 + t_2)^{-\alpha_3}\, dt_1\, dt_2$$

gilt. Dies ergibt sich am einfachsten durch Anwendung des *Ford*schen Kriteriums[5] indem das Doppelintegral und dessen Ableitungen beliebig hoher Ordnungen nach $1/x$ für alle $|x| > M$, $M > 0$, $\psi + \varepsilon \leqq \arg x \leqq \psi + 2\pi - \varepsilon$, $\psi = \arg t_1$ gleichmäßig konvergent sind (für $|t_1| > M\left(\frac{1}{\sin\varepsilon} - 1\right)$, $\varepsilon > 0$ bel. klein, gilt

$$\left|\left(\frac{t_1 - x}{x}\right)^{-\alpha_1 - i}\right| < K\left(1 + \frac{|t_1|}{M}\right)^{|\mathrm{Re}(-\alpha_1 - i)|}$$

und unter Berücksichtigung der für $\psi = \arg t_1$ gültigen Ungleichung

$$\frac{\pi}{2} - \arg(\alpha_1 - \alpha_3) < \psi < \frac{3\pi}{2} - \arg(\alpha_1 - \alpha_3).$$

Eine entsprechende Entwicklung erhält man für $y_2(x)$, indem α_1 mit α_2, α_1 mit α_2 vertauscht wird. Für $y_3(x)$ gilt:

$$y_3(x) \approx \frac{\text{const.}}{\Gamma(a_3)}\, e^{-\alpha_3 x}\, x^{-\alpha_3} \sum_{j=0}^{\infty} c_j\, z^{-j}$$

$$c_j = (-1)^j\, \frac{\Gamma(a_3 + j)}{\Gamma(j+1)} \int\limits_{(0,\infty)} \int\limits_{(0,\infty)} e^{(\alpha_1-\alpha_3)t_1}\, e^{(\alpha_2-\alpha_3)t_2}\, t_1^{-\alpha_1}\, t_2^{-\alpha_2}\, (t_1 + t_2)^j\, dt_1 dt_2$$

$$\frac{-\pi}{2} - d_1 < \arg x < \frac{5\pi}{2} - d_2$$

[5] *W. B. Ford*: Bull. Soc. Math. France **39**, 347—352 (1911).

$d_1 = \max[\arg(\alpha_1 - \alpha_3), \arg(\alpha_2 - \alpha_3)]$, $d_2 = \min[\arg(\alpha_1 - \alpha_3), \arg(\alpha_2 - \alpha_3)]$.

An Stelle der Lösung $y_3(x)$ könnte man zweckmäßiger das Integral

$$\bar{y}_3(x) = \text{const.}\, e^{-\alpha_1 x} \int\limits_{(-x,\,\infty)} e^{(\alpha_3-\alpha_1)t_1} t_1^{-\alpha_3} \int\limits_{(0,\,\infty)} e^{(\alpha_2-\alpha_1)t_2} t_2^{-\alpha_2} (t_1+t_2+x)^{-\alpha_1}\, dt_1\, dt_2$$

$$\mathrm{Re}\,(\alpha_3-\alpha_1)\,t_1 < 0,\ \mathrm{Re}\,(\alpha_2-\alpha_1)\,t_2 < 0,\ -\alpha_1,\ -\alpha_2 \neq 0, 1, 2, \ldots$$

betrachten, welches entsprechend zu $y_1(x)$ bzw. $y_2(x)$ asymptotisch entwickelbar ist.

Durch Vertauschen der Größen α_1, α_2, α_3 (unter gleichzeitiger Abänderung der Integrationswege) bzw. durch Verwenden anderer möglicher Integrationswege erhält man weitere Integrallösungen. Etwa kann man die zur Stelle $x = 0$ gehörigen Lösungen durch Reihenentwicklung der Integrale

$$y_1(x) = e^{-\alpha_3 x} \int\limits_{L_1^\infty} e^{(\alpha_1-\alpha_3)t_1} t_1^{-\alpha_1} \int\limits_{(\infty,\,-x-t_1)} e^{(\alpha_2-\alpha_3)t_2} t_2^{-\alpha_2} (t_1+t_2+x)^{-\alpha_3}\, dt_1\, dt_2 \qquad (19)$$

$$\mathrm{Re}\,(\alpha_2 - \alpha_3)\,t_2 < 0 \qquad -\alpha_3 \neq 0, 1, 2, \ldots$$

$$y_2(x) = e^{-\alpha_3 x} \int\limits_{L_2^\infty} e^{(\alpha_2-\alpha_3)t_1} t_1^{-\alpha_2} \int\limits_{(\infty,\,-x-t_1)} e^{(\alpha_1-\alpha_3)t_2} t_2^{-\alpha_1} (t_1+t_2+x)^{-\alpha_3}\, dt_1\, dt_2 \qquad (20)$$

$$\mathrm{Re}\,(\alpha_1 - \alpha_3)\,t_2 < 0 \qquad -\alpha_3 \neq 0, 1, 2, \ldots$$

$$y_3(x) = e^{-\alpha_3 x} \int\limits_{(0,\,-x)} e^{(\alpha_1-\alpha_3)t_1} t_1^{-\alpha_1} \int\limits_{(0,\,-x-t_1)} e^{(\alpha_2-\alpha_3)t_2} t_2^{-\alpha_2} (t_1+t_2+x)^{-\alpha_3}\, dt_1\, dt_2 \qquad (21)$$

$$-\alpha_1,\ -\alpha_2,\ -\alpha_3,\ -\alpha_2 - \alpha_3 + 1 \neq 0, 1, 2, \ldots$$

bekommen; $(0, -x)$ bzw. $(0, -x-t_1)$ sind hierbei Doppelschleifen um die angezeigten Punkte, während L_1^∞ bzw. L_2^∞ Schleifen um den Punkt $t_1 = \infty$ sind, etwa L_1^∞: Von $t_1 = \infty$ aus jener Halbebene kommend, für welche $\mathrm{Re}\,(\alpha_1 - \alpha_2)\,t_1 < 0$ ist

$$\Big(\int\limits_{(\infty,\,-x-t_1)} \ldots\, dt_2 \asymp e^{(\alpha_3-\alpha_2)(t_1+x)} (t_1+x)^{-\alpha_2}\, Q\Big(\frac{1}{x+t_1}\Big) \text{ für } \frac{\pi}{2} - \arg(\alpha_2-\alpha_3) <$$

$$< \arg(t_1+x) < \frac{7\pi}{2} - \arg(\alpha_2-\alpha_3)\Big),$$

ein Vollkreis um $t_1 = 0$ von beliebig großem Radius, welcher die Punkte $t_1 = 0, -x$ einschließt, und wieder entlang der ursprünglichen Richtung nach $t_1 = \infty$ zurückkehrend. Die Reihenentwicklung für $y_1(x)$ bzw. $y_2(x)$ ergibt sich sofort, indem man die Integrationsvariable t_2 durch $t_2 - x$ ersetzt, z. B. für $y_1(x)$:

$$y_1(x) = \frac{e^{-a_3 x}}{\Gamma(a_2)} \sum_{j=0}^{\infty} c_j\, x^j$$

$$c_j = \frac{\Gamma(a_2+j)}{\Gamma(j+1)} \int_{L_1^x} e^{(a_1-a_3)t_1} t_1^{-a_1} \int_{(x,\,-t_1)} e^{(a_2-a_3)t_2} t_2^{-a_2-j} (t_1+t_2)^{-a_3}\, dt_1\, dt_2$$

Für $y_3(x)$ ergeben sich zwei Möglichkeiten. Führt man an Stelle von t_2 die neue Variable $-t_2(t_1+x)$ und dann an Stelle von t_1, $-t_1 x$ ein $(-1 = e^{\pi i})$

$$y_3(x) = e^{\pi i(-a_1-a_2)} e^{-a_3 x}\, x^{-a_1-a_2-a_3+2} \cdot \tag{22}$$

$$\cdot \int_{(0,1)} e^{(a_3-a_1)t_1 x}\, t_1^{-a_1} (1-t_1)^{-a_2-a_3+1} \int_{(0,1)} e^{(a_3-a_2)t_2(1-t_1)x}\, t_2^{-a_2} (1-t_2)^{-a_3}\, dt_1\, dt_2$$

so ergibt sich durch Entwickeln von $e^{[(a_3-a_1)t_1+(a_3-a_3)t_2(1-t_1)]x}$ eine einfache Reihe; wird jedoch $e^{(a_3-a_2)t_2(1-t_1)x}$ und $e^{(a_3-a_1)t_1 x}$ einzeln entwickelt, so bekommt man die Doppelreihe

$$y_3(x) = e^{\pi i(-a_1-a_3)} e^{-a_3 x}\, x^{-a_1-a_3-a_3+2} \cdot$$

$$\cdot \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{[(a_3-a_2)x]^i}{i!} \frac{[(a_3-a_1)x]^j}{j!} \int_{(0,1)} t_1^{-a_1+j} (1-t_1)^{-a_2-a_3+1+i} \int_{(0,1)} t_2^{-a_2+i}$$
$$(1-t_2)^{-a_3}\, dt_1\, dt_2$$

bzw. falls $\mathrm{Re}(-a_1) > -1$, $\mathrm{Re}(-a_2) > -1$, $\mathrm{Re}(-a_3) > -1$ ist,

$$y_3(x) = (1-e^{2\pi i(-a_1-a_3)}) \prod_{k=1}^{3} (1-e^{2\pi i(-a_k)})\, e^{\pi i(-a_1-a_3)}$$
$$\frac{\Gamma(-a_1+1)\,\Gamma(-a_2+1)\,\Gamma(-a_3+1)}{\Gamma(-a_1-a_2-a_3+3)} \cdot e^{-a_3 x}\, x^{-a_1-a_3-a_3+2}$$
$$\Phi_2(-a_1+1, -a_2+1; -a_1-a_2-a_3+3; (a_3-a_1)x, (a_3-a_2)x)$$

wobei $\Phi_2(\beta, \beta'; \gamma; x, y)$ die konfluente *Appell*'sche Reihe[6]

$$\Phi_2(\beta, \beta'; \gamma; x, y) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(\beta, m)(\beta', n)\, x^m y^n}{(\gamma, m+n)(1, m)(1, n)}$$

$$(\lambda, k) = \frac{\Gamma(\lambda+k)}{\Gamma(\lambda)}$$

ist.

Zur vollständigen Lösung der Differentialgleichung (18) mittels der obigen mehrfachen Integrale sind noch die zu $x = 0$ gehörigen erzeugenden Substitutionen der einzelnen Fundamentalsysteme (die für $x = \infty$ ergeben sich hieraus sofort) sowie deren Übergangssubstitutionen anzugeben. Für die Integrale (19, 20, 21) sind die erzeugenden

Substitutionen aus den Reihenentwicklungen ersichtlich, ergeben sich aber auch unmittelbar aus den Integraldarstellungen (Ersetzen von t_2 durch $t_2 - x$ in (19), (20) bzw. für $|x| > 1$ in (22), welche Bedingung jedoch nicht wesentlich ist). Allgemein müßte die Methode der veränderlichen Integrationswege angewendet werden. Wie bei der hypergeometrischen Differentialgleichung besteht somit auch hier die Möglichkeit, die Laplacesche Differentialgleichung (18) mit Hilfe mehrfacher Integrale zu behandeln. Für die allgemeinste Laplacesche Differentialgleichung mit linearen Koeffizienten

$$[A(d) + x B(d)]\, y = 0$$

$$A(d) = C(d+\varrho_1)(d+\varrho_2)\ldots(d+\varrho_q),\quad B(d) = (d+\alpha_1)^{\mu_1}(d+\alpha_2)^{\mu_2}\ldots(d+\alpha_r)^{\mu_r}$$

kann man $A(d)$ zerlegen

$$\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_r = p \qquad p \lesseqgtr q$$

$$A(d) = \frac{A(d)}{B(d)}\, B(d) = B(d)\,[m_0 + m_1 d + \ldots + m_\lambda d^\lambda +$$

$$+ \sum_{i=1}^{\mu_1} \frac{a_i^{(1)}}{(d+\alpha_1)^i} + \sum_{i=1}^{\mu_2} \frac{a_i^{(2)}}{(d+\alpha_2)^i} + \ldots + \sum_{i=1}^{\mu_r} \frac{a_i^{(r)}}{(d+\alpha_r)^i}] \qquad p+\lambda = q$$

und bekommt dann als Lösung

$$y = \text{const.} \int_{C_1} g^{(1)}(t_1) \int_{C_2} g^{(2)}(t_2)\ldots \int_{C_r} g^{(r)}(t_r)\, f(t_1+t_2+\ldots+t_r+x)\, dt_1 \ldots dt_r$$

wobei $g^{(i)}(t)$ $(i = 1, 2, \ldots r)$ der Differentialgleichung

$$[(d-\alpha_i)^{\mu_i} (\sum_{j=1}^{\mu_i} (-1)^{j+1} \frac{a_j^{(i)}}{(d-\alpha_i)^j}) + t\,(d-\alpha_i)^{\mu_i}]\, g = 0 \qquad (23)$$

bzw. $f(z)$ der Differentialgleichung

$$[m_0 + m_1 d + \ldots + m_\lambda d^\lambda + z]\, y = 0 \qquad (24)$$

genügt. Die Integrationswege sind nach Festlegung bestimmter Lösungen von (23), (24) wieder geeignete Schleifen um die singulären Punkte des Integranden.

---

[6] *P. Appell-J. Kampe de Fériet*: Fonctions hypergéométriques et hypersphériques, 126 (1926) bzw. *P. Humbert*: Proc. Roy. Soc. Edinburgh, **41**, 73—96 (1920-21), *A. Erdélyi*: S. B. Akad. Wiss. Wien, math.-naturwiss. Kl. IIa **146**, 431—467 (1937).

Zur projektiven Geometrie der Linienelemente fünfter und vierter Ordnung.

Von

Wolfgang Ströher, Wien.

(Eingelangt am 10. Juni 1952.)

In dieser Note soll eine geometrische Darstellung der Linienelemente fünfter und vierter Ordnung gegeben werden. Spricht man von der Deutung des differentialgeometrischen Begriffes „Linienelement n-ter Ordnung", so muß man im Sinne von *F. Kleins* noch hinzufügen, welche Gruppe den Betrachtungen zugrunde gelegt werden soll. Dies sei hier die *projektive Gruppe*. Demgemäß werden Kurven, die in dieser Gruppe eine ausgezeichnete Rolle spielen, nämlich die *Geraden*, die *Kegelschnitte* und die *W-Kurven 1. und 2. Art* vor anderen den Vorrang haben. Bei Betrachtung der Linienelemente fünfter Ordnung muß man insbesondere die letzte Kurvengattung heranziehen, da die beiden ersten natürlich nicht ausreichen. Nun ist bekanntlich eine W-Kurve 1. Art durch eines ihrer Linienelemente siebenter Ordnung eindeutig bestimmt, so daß sich durch ein Linienelement sechster Ordnung ∞^1, durch ein Linienelement fünfter Ordnung jedoch ∞^2 W-Kurven 1. Art legen lassen.

Bei der Betrachtung der *Linienelemente fünfter Ordnung* hätte man also eine zweiparametrige Mannigfaltigkeit von W-Kurven 1. Art zu untersuchen. Da diese Mannigfaltigkeit nicht einfach zu überblicken ist, erscheint es hier am zweckmäßigsten, das Linienelement fünfter Ordnung durch W-Kurven 2. Art darzustellen. Die W-Kurven 2. Art entstehen bekanntlich aus den W-Kurven 1. Art, wenn deren Fundamentaldreieck einfach ausartet, d. h. zwei Eckpunkte in den sogenannten „Doppelpunkt" und dementsprechend zwei Seiten in die „*Doppelgerade*" zusammenrücken, während der dritte Eckpunkt, der „*Verzweigungspunkt*", um den die beiden beim Grenzübergang in die Doppelgerade übergehenden Dreiecksseiten sich drehen, ungeändert bleibt[1]. Die dem Verzweigungspunkt gegenüberliegende „*Verzweigungsgerade*", auf der der

[1] Enz. Math. Wiss. III. D. 4. S. 204—215 *(G. Scheffers)*.

Doppelpunkt der W-Kurve 2. Art liegt, beteiligt sich am beschriebenen Grenzprozeß gleichfalls nicht.

Beschränkt man sich auf *reelle* Verhältnisse, so wird eine der oben beschriebenen *W-Kurven 2. Art* durch eines ihrer *Linienelemente sechster Ordnung* eindeutig festgelegt. Zieht man also diese Kurvenklasse zur Versinnlichung der *Linienelemente fünfter Ordnung heran*, so hat man es bloß mit einer einparametrigen Mannigfaltigkeit zu tun, wodurch die geometrischen Verhältnisse wesentlich vereinfacht werden. Daher soll im folgenden dieser Weg zur Lösung des vorgelegten Problems beschritten werden.

Durch ein *Linienelement vierter Ordnung* läßt sich ein *einziger Kegelschnitt* legen. Daher wird man gerne diese bekannten Kurven zur geometrischen Festlegung dieses Elementes heranziehen. Etwas umständlicher läßt sich dieses Ziel durch die zweiparametrige Schar von W-Kurven 2. Art erreichen, die das genannte Element enthalten. Gleichwohl sei zum Schluß auch dieser Fall untersucht, der geometrisch interessanten Tatsachen wegen, die sich erkennen lassen.

1. W-Kurven 2. Art.

Die Mannigfaltigkeit aller ∞^1 *W-Kurven 1. Art* durch ein vorgegebenes Linienelement sechster Ordnung wurde in einer früheren Arbeit untersucht. Dabei ergaben sich folgende bemerkenswerte Resultate[2]:

Die *Fundamentaldreiecke* aller ∞^1 W-Kurven 1. Art w, welche das Linienelement sechster Ordnung e^0 mit den kartesischen Koordinaten

$$x^0 = 0,\ y^0 = 0,\ y_1{}^0 = 0,\ y_2{}^0 = 1,\ y_3{}^0 = 0,\ y_4{}^0 = 0,\ y_5{}^0 = z,\ y_6{}^0 = t,\quad z \neq 0 \qquad (1)$$

enthalten, sind der Kubik c^3

$$6\,z\,x^3 - 2\,t\,x^2\,y + z^2\,y^3 + 4\,t\,y^2 - 12\,z\,x\,y = 0 \qquad (2)$$

eingeschrieben, welche im Punkte 0 $(x^0,\ y^0)$ (dem Ursprung des gewählten Bezugssystems) einen Doppelpunkt besitzt und dortselbst das Element e^0 von vierter Ordnung berührt. Die zweite, von der Tangente des e^0 verschiedene Doppelpunktstangente dieser *Fundamentalkurve* c^3

$$y = \frac{3\,z}{t}\,x \qquad (3)$$

ist die *projektive Normale* des Elements e^0 im betrachteten Punkt.

---

[2] *W. Ströher*: Darstellung des Linienelementes sechster Ordnung durch W-Kurven. Mh. f. Math. **56**. 288—303 (1952).

Die ∞^1 Fundamentaldreiecke sind gleichzeitig Poldreiecke eines nd desselben *Kegelschnittes* k, der sich geometrisch folgendermaßen harakterisieren läßt: er ist autopolar in Bezug auf den *Schmiegkegelchnitt* c

$$x^2 - 2y = 0 \tag{4}$$

les Elementes e^0 und muß ihn infolgedessen doppelt berühren. Die beiden Berührungspunkte von c und k sind die Punkte x^0, y^0 und der davon erschiedene Schnittpunkt von c und der projektiven Normalen (3). Daraus läßt sich sofort die Gleichung von k

$$9z^2x^2 - 12tzxy + 2t^2y^2 + 18z^2y = 0 \tag{5}$$

rmitteln.

Die Fundamentaldreiecke aller W-Kurven 1. Art durch e^0, die der Fundamentalkurve c^3 eingeschrieben und Poldreiecke von k sind, verden i. a. nicht ausarten, d. h. es werden keine zwei Ecken, bzw. Seiten zusammenfallen. Dies kann nur eintreten, wenn ein Eckpunkt les Poldreieckes auf k selbst liegt. In den Schnittpunkten von c^3 und k ind daher die *Doppelpunkte* der *W-Kurven 2. Art* zu erwarten, welche las Element e^0 enthalten. Eine kurze Rechnung liefert als einzigen eellen, für das vorgelegte Problem bedeutungsvollen Punkt das Resultat

$$x = \frac{3^{-1}z^{-1}t - 2^{-2/3}3^{-1/3}z^{1/3}}{2^{-1}3^{-2}z^{-2}t^2 - 2^{-2/3}3^{-4/3}z^{-2/3}t - 2^{-7/3}3^{-2/3}z^{2/3}},$$

$$y = \frac{1}{2^{-1}3^{-2}z^{-2}t^2 - 2^{-2/3}3^{-4/3}z^{-2/3}t - 2^{-7/3}3^{-2/3}z^{2/3}}, \tag{6}$$

voraus sich erkennen läßt, daß durch ein Linienelement sechster Ordnung bloß *eine einzige reelle W-Kurve 2. Art* existiert.

Die Tangente an k im soeben ermittelten Punkt (6) stellt die *Doppelgerade* dar, welche aus c^3 den *Verzweigungspunkt*

$$x = \frac{3^{-1}z^{-1}t + 2^{1/3}3^{-1/3}z^{1/3}}{2^{-1}3^{-2}z^{-2}t^2 + 2^{1/3}3^{-4/3}z^{-2/3}t + 2^{-7/3}3^{-2/3}5z^{2/3}},$$

$$y = \frac{1}{2^{-1}3^{-2}z^{-2}t^2 + 2^{1/3}3^{-4/3}z^{-2/3}t + 2^{-7/3}3^{-2/3}5z^{2/3}} \tag{7}$$

ausschneidet.

2. Das Linienelement fünfter Ordnung.

Es werde nunmehr das *Linienelement fünfter Ordnung* einer Betrachtung unterzogen. Dabei erweist es sich als vorteilhaft, im Element

mit den Koordinaten (1) die Größe $z = 1$ zu wählen und $y_6^0 = t$ variabel zu lassen:

$$x^0 = 0,\ y^0 = 0,\ y_1^0 = 0,\ y_2^0 = 1,\ y_3^0 = 0,\ y_4^0 = 0,\ y_5^0 = 1,\ y_6^0 = t. \quad (8)$$

Alle hierdurch bestimmten W-Kurven 2. Art enthalten somit das Linienelement fünfter Ordnung

$$x^0 = 0,\ y^0 = 0,\ y_1^0 = 0,\ y_2^0 = 1,\ y_3^0 = 0,\ y_4^0 = 0,\ y_5^0 = 1,$$

während sie sich in der sechsten Ableitung $y_6^0 = t$ unterscheiden.

Betrachtet man zunächst das Linienelement sechster Ordnung (8), so erhält man sofort die Fundamentalpunkte für die W-Kurve mit $y_6^0 = t$, wenn man in (6) und (7) $z = 1$ setzt. Der doppelt zählende Fixpunkt hat die Koordinaten

$$x = \frac{3^{-1}\,t - 2^{-2/3}\,3^{-1/3}}{2^{-1}\,3^{-2}\,t^2 - 2^{-2/3}\,3^{-4/3}\,t - 2^{-7/3}\,3^{-2/3}},$$

$$y = \frac{1}{2^{-1}\,3^{-2}\,t^2 - 2^{-2/3}\,3^{-4/3}\,t - 2^{-7/3}\,3^{-2/3}}, \quad (9)$$

während man für den einfachen Fixpunkt

$$x = \frac{3^{-1}\,t + 2^{1/3}\,3^{-1/3}}{2^{-1}\,3^{-2}\,t^2 + 2^{1/3}\,3^{-4/3}\,t + 2^{-7/3}\,3^{-2/3}\,5},$$

$$y = \frac{1}{2^{-1}\,3^{-2}\,t^2 + 2^{1/3}\,3^{-4/3}\,t + 2^{-7/3}\,3^{-2/3}\,5} \quad (10)$$

findet. Die Orte der Doppelpunkte und Verzweigungspunkte bei variablem t ergeben sich durch Elimination dieses Parameters aus (9) und (10). Man findet:

$$x^2 - 2\,y - 2^{-1/3}\,3^{-2/3}\,y^2 = 0 \ldots \textit{Ort der Doppelpunkte } (k_d),$$

$$x^2 - 2\,y + 2^{-4/3}\,3^{-2/3}\,y^2 = 0 \ldots \textit{Ort der Verzweigungspunkte } (k_v).$$

Man erkennt unmittelbar, daß beide Kegelschnitte dem Hyperoskulationsbüschel

$$x^2 - 2\,y + \sigma\,y^2 = 0$$

angehören, welches durch den Schmiegkegelschnitt (4) und die doppelt gezählte x-Achse aufgespannt wird. Dem *Doppelort* entspricht der Büschelparameter $\sigma_1 = -2^{-1/3}\,3^{-2/3}$, dem *Verzweigungsort* $\sigma_2 = 2^{-4/3}\,3^{-2/3}$. Somit gilt: *Die Orte der Doppelpunkte und Verzweigungspunkte aller W-Kurven 2. Art durch dasselbe Linienelement fünfter Ordnung erfüllen je*

einen Kegelschnitt. Diese beiden Kegelschnitte gehören dem vom Schmiegkegelschnitt c und der doppelt gezählten Tangente des betrachteten Linienelementes fünfter Ordnung aufgespannten Hyperoskulationsbüschel an. Die vier Kegelschnitte bestimmen in der angeführten Reihenfolge das Doppelverhältnis $\delta = \sigma_1/\sigma_2 = -2$.

Legt man etwa ein Linienelement fünfter Ordnung durch eine W-Kurve 2. Art w fest, so sind die oben gefundenen Kegelschnitte k_d und k_v mitbestimmt. Sie berühren ja w im betrachteten Punkt von dritter Ordnung und enthalten je einen Fundamentalpunkt. Um nun eine weitere W-Kurve 2. Art des Büschels zu finden, kann man etwa auf k_d einen Punkt als Doppelpunkt wählen. Die Aufgabe besteht nun darin, den entsprechenden Verzweigungspunkt auf k_v zu finden.

Zu diesem Zweck projiziert man die Punkte von k_d aus 0. Den Richtungskoeffizienten des Projektionsstrahles erhält man aus (9)

$$\lambda = \frac{y}{x} = \frac{1}{3^{-1}t - 2^{-2/3}3^{-1/3}}. \tag{11}$$

Desgleichen erhält man aus (10) bei Projektion des entsperchenden Punktes auf k_v aus 0 als Richtungskoeffizienten des Projektionsstrahles

$$\mu = \frac{1}{3^{-1}t + 2^{1/3}3^{-1/3}}. \tag{12}$$

Eliminiert man aus diesen Gleichungen die Größe t, so ergibt sich eine Beziehung zwischen λ und μ in folgender Gestalt:

$$2^{-2/3}3^{2/3}\lambda\mu - (\lambda - \mu) = 0.$$

Die Kegelschnitte k_d und k_v sind demnach *projektiv* aufeinander bezogen. Auch im Strahlbüschel 0 liegt eine Projektivität vor. Sie ist, wie man leicht erkennt, *parabolisch* und die vereinigten Doppelelemente fallen mit der Tangente zusammen. Mithin ist diese *parabolische Projektivität* schon durch die Angabe der ersten, das Linienelement fünfter Ordnung festlegenden W-Kurve bestimmt. Die Fundamentalpunkte aller weiteren W-Kurven können somit in einfacher Weise konstruiert werden.

Greift man eine W-Kurve aus dem Büschel heraus, so entsprechen ihren Fixpunkten die Strahlen mit den Richtungskoeffizienten (11) und (12) des Strahlbüschels in 0. Die projektive Normale dieser W-Kurve ist der Strahl mit $\lambda = 3t^{-1}$, wie man aus (3) für $z = 1$ entnimmt. Im Punkte 0 sind demnach vier Geraden mit der Kurve invariant verknüpft: die Strahlen, welche die Fundamentalpunkte aus 0 projizieren,

die Tangente und die projektive Normale. Deren Doppelverhältnis ergibt sich unabhängig von t mit -2, so daß man sagen kann: *In einem Punkte einer W-Kurve 2. Art ist das Doppelverhältnis der Strahlen, welche den doppelt zählenden und einfachen Fundamentalpunkt aus dem betrachteten Punkt projizieren, zusammen mit der Tangente und der projektiven Normalen der Kurvenpunkte gleich* -2.

Die metrische Konsequenz dieses Satzes ist folgende: stellt man die Kurve in der Gestalt $y = e^x$ dar, so ist die Normalprojektion des Abschnittes auf der projektiven Normalen zwischen Kurvenpunkt und Schnittpunkt mit der x-Achse auf letztere konstant gleich 2.

Wünscht man die W-Kurve 2. Art durch die sie erzeugende *infinitesimale Projektivität* festzulegen, so wird man das Fixgebilde und das Linienelement erster Ordnung, gebildet durch den Ursprung und die x-Achse heranziehen.

Nach den obigen Darlegungen bereitet das Aufsuchen der Fixpunkte keinerlei Schwierigkeiten. Die Fixgeraden dagegen liefert folgende Überlegung: jedes Fixdreieck einer W-Kurve ist Poldreieck eines gewissen Kegelschnittes k. Da hier W-Kurven 2. Art vorliegen, ist dieses Poldreieck natürlich ausgeartet, und zwar ist der Doppelpunkt ein Punkt von k, die entsprechende Doppelgerade die zugehörige Tangente, während der Verzweigungspunkt samt gegenüberliegender Fixgeraden ein weiteres Pol- und Polarenpaar sind[3]. Diesen Kegelschnitt k kann man leicht konstruieren. Er besitzt ja im Ursprung entgegengesetzt gleiche Krümmung wie der Schmiegkegelschnitt c. Die zwei restlichen Bestimmungsstücke liefert die Tatsache, daß k den Doppelpunkt (6) enthalten und dortselbst die Doppelgerade (die Verbindung des Doppelpunktes mit dem Verzweigungspunkt) berühren muß. Aber noch auf anderem Wege gelangt man zum Kegelschnitte k. Er ist nämlich autopolar in bezug auf c. Seine beiden Berührungspunkte mit c sind 0 und der zweite Schnittpunkt der projektiven Normalen mit c. Da sich die projektive Normale nach dem vorangehenden (siehe S. 22–23) einfach angeben läßt, ist es ein leichtes, den Kegelschnitt k zu konstruieren. Ermittelt man seine Gleichung nach einer der obigen Methoden, so findet man

$$9\,x^2 - 12\,t\,x\,y + 2\,t^2\,y^2 + 18\,y = 0. \qquad (13)$$

Diese einparametrige Kegelschnittmannigfaltigkeit umhüllt bei variablem t den Schmiegkegelschnitt c, wie man durch Rechnung und

[3] W. Ströher: a. a. O.

Überlegung in gleich einfacher Weise erkennt. *Die ∞^1 Kegelschnitte k, die zu je einer W-Kurve 2. Art eines Linienelementes fünfter Ordnung gehören, besitzen die entgegengesetzt gleiche Krümmung wie das betrachtete Linienelement und umhüllen dessen Schmiegkegelschnitt.*

Anschließend sollen noch die Orte gesucht werden, welche die Doppelgeraden bzw. Verzweigungsgeraden umhüllen.

Da die Verbindung der Punkte (9) und (10) die Doppelgerade liefert, läßt sich deren Gleichung sofort hinschreiben

$$(t + 2^{-2/3}\, 3^{2/3})\, x - (2^{-1}\, 3^{-1}\, t^2 + 2^{-2/3}\, 3^{-1/3}\, t - 2^{-7/3}\, 3^{1/3})\, y - 3 = 0.$$

Diese Gerade umhüllt bei variablem t den Kegelschnitt

$$x^2 - 2\, y + 2^{-1/3}\, 3^{-2/3}\, y^2 = 0. \tag{14}$$

Ganz analog findet man das Hüllgebilde der Verzweigungsgeraden. Sie ist ja die Polare des Verzweigungspunktes (10) in bezug auf den Kegelschnitt k (13). Ihre Gleichung lautet

$$(t - 2^{1/3}\, 3^{2/3})\, x - (2^{-1}\, 3^{-1}\, t^2 - 2^{1/3}\, 3^{-1/3}\, t + 2^{-7/3}\, 3^{1/3}\, 5)\, y - 3 = 0.$$

Sie umhüllt den Kegelschnitt

$$x^2 - 2\, y - 2^{-4/3}\, 3^{-2/3}\, y^2 = 0. \tag{15}$$

Aus der Betrachtung der Gleichungen (14) und (15) erkennt man sofort, daß beide Kegelschnitte dem Büschel

$$x^2 - 2\, y + \tau\, y^2 = 0$$

angehören. Ihnen entsprechen die Parameterwerte

$$\tau_1 = 2^{-1/3}\, 3^{-2/3},\ \tau_2 = -\, 2^{-4/3}\, 3^{-2/3}.$$

Hieraus entnimmt man: *Die Doppel- und Verzweigungsgeraden aller W-Kurven 2. Art durch ein Linienelement fünfter Ordnung umhüllen je einen Kegelschnitt. Sie gehören dem vom Schmiegkegelschnitt und der doppelt gezählten Tangente aufgespannten Hyperoskulationsbüschel an und bilden mit diesen Basiselementen das Doppelverhältnis $\delta = \tau_1/\tau_2 = -2$.*

Ordnet man aber im oben genannten Büschel dem Ort der Doppelpunkte den der Doppelgeraden, dem Ort der Verzweigungspunkte den der Verzweigungsgeraden zu, so erkennt man aus der Beziehung $\sigma_1 = -\tau_1$, $\sigma_2 = -\tau_2$: *Die Orte der Doppelelemente und Doppelgeraden, bzw. die Orte der Verzweigungspunkte und Verzweigungsgeraden trennen den Schmiegkegelschnitt und die doppelt gezählte Tangente harmonisch.*

3. Das Linienelement vierter Ordnung.

Der folgende Abschnitt ist der Untersuchung der Mannigfaltigkeit aller W-Kurven 2. Art gewidmet, die ein *Linienelement vierter Ordnung*

gemeinsam haben, d. h. an einer gewissen Stelle denselben Schmiegkegelschnitt besitzen. Die Mannigfaltigkeit aller dieser W-Kurven ist zweiparametrig. Um die geometrischen Verhältnisse übersichtlicher zu gestalten, werden die W-Kurven zu ∞^1 Scharen von je ∞^1 Exemplaren angeordnet, und zwar in der Weise, daß jede Schar alle ∞^1 W-Kurven umfaßt, die an der betrachteten Stelle dieselbe projektive Normale haben. Läßt man die projektive Normale alle möglichen Lagen einnehmen, so erhält man die angeführten ∞^1 Scharen von ∞^1 W-Kurven 2. Art.

Den weiteren Untersuchungen liege wieder das Element (1)

$$x^0 = 0,\ y^0 = 0,\ y_1^0 = 0,\ y_2^0 = 1,\ y_3^0 = 0.\ y_4^0 = 0,\ y_5^0 = z,\ y_6^0 = t \quad z \neq 0$$

zugrunde. Die Projektivnormale dieses Elementes hat nach (3) die Gleichung

$$y = 3\, z\, t^{-1}\, x.$$

Soll dieselbe für verschiedene Wahl von z und t erhalten bleiben, so muß zwischen den Größen z und t die Beziehung $\varkappa = 3\, z\, t^{-1}$ bestehen, wobei $\varkappa$ eine beliebige Konstante bedeutet. Somit haben die W-Kurven mit gemeinsamem Schmiegkegelschnitt c und gemeinsamer Projektivnormalen die Doppelpunkte

$$x = \frac{\varkappa^{-1} - 2^{-2/3} 3^{-1/3} z^{1/3}}{2^{-1} \varkappa^{-2} - 2^{-2/3} 3^{-1/3} \varkappa^{-1} z^{1/3} - 2^{-7/3} 3^{-2/3} z^{2/3}},$$

$$y = \frac{1}{2^{-1} \varkappa^{-2} - 2^{-2/3} 3^{-1/3} \varkappa^{-1} z^{1/3} - 2^{-7/3} 3^{-2/3} z^{2/3}} \tag{16}$$

und die Verzweigungspunkte

$$x = \frac{\varkappa^{-1} + 2^{1/3} 3^{-1/3} z^{1/3}}{2^{-1} \varkappa^{-2} + 2^{1/3} 3^{-1/3} z^{1/3} \varkappa^{-1} + 2^{-7/3} 3^{-2/3} 5\, z^{2/3}},$$

$$y = \frac{1}{2^{-1} \varkappa^{-2} + 2^{1/3} 3^{-1/3} z^{1/3} \varkappa^{-1} + 2^{-7/3} 3^{-2/3} 5\, z^{2/3}}. \tag{17}$$

Variiert das z, so erfüllen die Doppelpunkte den Kegelschnitt

$$\varkappa^2 x^2 - 4\, \varkappa\, x\, y + 2\, y^2 + 2\, \varkappa^2\, y = 0. \tag{18}$$

Durch eine einfache Umformung erhält dieser die Gestalt

$$(y - \varkappa\, x)^2 - y\,(2\, \varkappa\, x - y - 2\, \varkappa^2) = 0. \tag{19}$$

Demnach gehört er dem von den Kegelschnitten $(y - \varkappa\, x)^2 = 0$ und

$y(2\varkappa x - y - 2\varkappa^2) = 0$ aufgespannten Berührungsbüschel an. Der erste Bestandteil ist dabei die doppelt gezählte projektive Normale. Der andere zerfallende Kegelschnitt wird von der x-Achse und der Tangente an den Kegelschnitt c im vom Ursprung verschiedenen Schnittpunkt der projektiven Normalen mit c gebildet. Die Kegelschnitte c und (18) berühren einander daher doppelt. Außerdem entnimmt man leicht, daß (18) und c im Ursprung entgegengesetzt gleiche Krümmung besitzen. Daraus folgt weiter, daß die Kegelschnitte (18) und c autopolar sind. Im Kegelschnitt (18) erkennt man also denjenigen Kegelschnitt k, dessen Polarität auch die W-Kurve in sich überführt[4].

Dieser Sachverhalt liefert ein einfaches Verfahren, um alle W-Kurven 2. Art zu konstruieren, die in einem gegebenen Punkt gemeinsamen Schmiegkegelschnitt und gemeinsame projektive Normale besitzen. Zunächst ermittelt man den Kegelschnitt k, der c in den Schnittpunkten mit der projektiven Normalen berührt und außerdem autopolar in bezug auf c ist. Ein beliebiges Linienelement von k kann dann als Doppelpunkt und Doppelgerade einer W-Kurve aufgefaßt werden. Nach einem auf S. 22–23 hergeleiteten Ergebnis läßt sich auf der Doppelgeraden der Verzweigungspunkt sogleich angeben, dessen Polare in bezug auf k ja die Verzweigungsgerade ist. Die gesuchte W-Kurve ist somit durch Angabe ihres Fixgebildes und eines Linienelementes vollkommen bestimmt. Daher gilt: *Die Doppelpunkte aller W-Kurven 2. Art mit gemeinsamem Schmiegkegelschnitt und gemeinsamer Projektivnormalen erfüllen einen Kegelschnitt k, welcher autopolar in bezug auf c ist. Er berührt c in den Schnittpunkten mit der projektiven Normalen. Die Doppelgeraden umhüllen denselben Kegelschnitt k. Sie berühren ihn in den Doppelpunkten.*

Die Elimination von z aus (17) liefert den Ort der Verzweigungspunkte

$$5\varkappa^2 x^2 - 2\varkappa x y + y^2 - 8\varkappa^2 y = 0 \tag{20}$$

oder umgeformt

$$(y - \varkappa x)^2 + 4\varkappa^2 (x^2 - 2y) = 0. \tag{21}$$

Hieraus entnimmt man: *Der Ort aller Verzweigungspunkte der W-Kurven 2. Art mit gemeinsamem Schmiegkegelschnitt c und gemeinsamer Projektivnormalen ist ein Kegelschnitt $\bar{k}$, welcher dem von c und der doppelt gezählten Projektivnormalen aufgespannten Berührungsbüschel angehört. Die Mehmke'sche Invariante von c und $\bar{k}$ beträgt $M = 4/5$.*

[4] *W. Ströher*: a. a. O.

Der Vollständigkeit halber sei noch das Ergebnis für die Einhüllende der Verzweigungsgeraden mitgeteilt. Es gilt nämlich: *Der Ort aller Verzweigungsgeraden der W-Kurven 2. Art mit gemeinsamem Schmiegkegelschnitt c und gemeinsamer Projektivnormalen ist ein Kegelschnitt k^*, welcher dem von c und der doppelt gezählten Projektivnormalen aufgespannten Berührungsbüschel angehört. Die Mehmke'sche Invariante von c und k^* beträgt $M = 5/4$.*

Um nun *alle* W-Kurven 2. Art mit demselben Schmiegkegelschnitt zu erfassen, muß man die projektive Normale variieren. Dabei seien zunächst die sich ergebenden Kegelschnitte k betrachtet. Aus (19) erkennt man sofort, daß bei variablem $\varkappa$ die Gerade $2\varkappa x - y - 2\varkappa^2 = 0$ den Schmiegkegelschnitt c umhüllt. Da für jedes beliebige $\varkappa$ der Kegelschnitt k den Kegelschnitt c in demselben Punkte wie diese Gerade berührt, umhüllen alle k den Schmiegkegelschnitt c.

Alle ∞^1 Kegelschnitte k besitzen die entgegengesetzt gleiche Krümmung wie der Schmiegkegelschnitt c. Dieser wird von ihnen umhüllt.

Ein ganz analoger Satz gilt für die Kegelschnitte $\bar{k}$, wie man aus (20) bzw. (21) entnimmt: *Alle ∞^1 Kegelschnitte $\bar{k}$ haben die 4/5fache Krümmung wie der Schmiegkegelschnitt c. Dieser wird von ihnen umhüllt.*

Flächenläufige Bewegungsvorgänge im elliptischen Raum I.

Von

Hans Robert Müller, Graz.

(Eingelangt am 24. Juni 1952.)

Zwangsläufige Bewegungsvorgänge wurden bei nicht-Euklidischer Maßbestimmung von *W. Blaschke*[1] und insbesondere von *R. Garnier*[2] untersucht; im Folgenden mögen nun die wichtigsten Eigenschaften zweigliedriger Bewegungen behandelt werden. Nach dem Vorbilde *W. Blaschke's* bei der Darstellung der nicht-Euklidischen Geometrie und Mechanik bediene ich mich des *Cartan*schen Kalküls der alternierenden Differentialformen und äußeren Ableitungen, sowie der dem elliptischen Raum angepaßten Quaternionenschreibweise.

1.

Einem Punkt $\mathfrak{P}$ des elliptischen Raumes mit der Krümmung $+1$ entspreche eine genormte Quaternion

$$\mathfrak{P} = p_0 + \mathfrak{e}_1 p_1 + \mathfrak{e}_2 p_2 + \mathfrak{e}_3 p_3.$$

Bedeutet $\overline{\mathfrak{P}}$ die zu $\mathfrak{P}$ konjugierte Quaternion, so gilt die Normierungsbedingung

$$(\mathfrak{P}\,\mathfrak{P}) = \mathfrak{P}\,\overline{\mathfrak{P}} = \overline{\mathfrak{P}}\,\mathfrak{P} = \Sigma\, p_i^2 = 1.$$

Die Quaternionen $+\mathfrak{P}$ und $-\mathfrak{P}$ stellen denselben Punkt $\mathfrak{P}$ dar. Die elliptische Maßbestimmung werde auf der (absoluten) Quadrik

$$(\mathfrak{X}\,\mathfrak{X}) = \Sigma\, x_i^2 = 0$$

begründet; zwei Punkte $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ besitzen dann einen Abstand ϑ, der durch

---

[1] *W. Blaschke*, Nicht-Euklidische Geometrie und Mechanik I—III, Hamburger Math. Einzelschr., 34. Heft (1942).

[2] *R. Garnier*, Cours de Cinématique, III (Géometrie et Cinématique Cayleyennes), Paris-Gauthier-Villars (1951).

$$\cos\vartheta = (\mathfrak{P}\,\mathfrak{Q}) = \Sigma\, p_i\, q_i = \tfrac{1}{2}\{\mathfrak{P}\,\overline{\mathfrak{Q}} + \mathfrak{Q}\,\overline{\mathfrak{P}}\}$$

erklärt ist. — Eine Bewegung des elliptischen Raumes (eigentlich orthogonale Transformation), die einen Punkt $\mathfrak{P}$ in einen Punkt $\mathfrak{P}^*$ überführt, kann in der Form

$$\mathfrak{P}^* = \overline{\mathfrak{L}}\,\mathfrak{P}\,\mathfrak{L}',\quad \mathfrak{L}\,\overline{\mathfrak{L}} = \mathfrak{L}'\,\overline{\mathfrak{L}}' = 1$$

geschrieben werden, wobei die beiden genormten Quaternionen $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{L}'$ völlig unabhängig voneinander sind. — Den gerichteten Geraden $\{\mathfrak{P}\,\mathfrak{Q}\}$ des elliptischen Raumes wird ein Paar von Einheitsvektoren $\mathfrak{r}, \mathfrak{r}'$ zugeordnet (Sphärische Abbildung von *Fubini*, *Hjelmslev-Petersen* und *Study*). Gilt $(\mathfrak{P}\,\mathfrak{Q}) = 0$, so haben wir

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{Q}\,\overline{\mathfrak{P}} = -\,\mathfrak{P}\,\overline{\mathfrak{Q}},\quad \mathfrak{r}' = \overline{\mathfrak{P}}\,\mathfrak{Q} = -\,\overline{\mathfrak{Q}}\,\mathfrak{P}.$$

Obige Bewegung schreibt sich in diesen Richtungsvektoren der Geraden als

$$\mathfrak{r}^* = \overline{\mathfrak{L}}\,\mathfrak{r}\,\mathfrak{L},\quad \mathfrak{r}^{*\prime} = \overline{\mathfrak{L}}'\,\mathfrak{r}'\,\mathfrak{L}'.$$

Nach *Euler* (1776) stellt dies aber eine Drehung des Vektors $\mathfrak{r}$ in den Vektor $\mathfrak{r}^*$ auf der linken und ebenso eine Drehung von $\mathfrak{r}'$ nach $\mathfrak{r}^{*\prime}$ auf der rechten Bildkugel dar. Den Bewegungen des elliptischen Raumes entsprechen somit die (voneinander unabhängigen) Drehungen der beiden Richtungskugeln. Ein zweigliedriger stetiger Bewegungsvorgang im elliptischen Raum wird sich somit in zwei flächenläufigen Drehvorgängen der beiden Bildkugeln spiegeln, die durch gleiche Parameter u, v aufeinander bezogen sind.

Vier paarweise orthogonale Punkte $\mathfrak{P}_0$, $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$ bilden ein zur absoluten Quadrik polares Tetraeder. Wir denken uns die Bezeichnung so gewählt, daß die Determinante $(\mathfrak{P}_0, \mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3) = +1$ wird.

Der Gangraum R unseres Bewegungsvorganges werde nun durch ein solches Polartetraeder, das „Gangtetraeder" $\{\mathfrak{E}_0, \mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2, \mathfrak{E}_3\}$, der Rastraum R^* durch das „Rasttetraeder" $\{\mathfrak{E}_0^*, \mathfrak{E}_1^*, \mathfrak{E}_2^*, \mathfrak{E}_3^*\}$ vertreten. Dem Beispiele *Van der Woude*'s (in der ebenen Euklidischen Kinematik) und *W. Blaschke*'s (in der räumlichen Euklidischen Kinematik) folgend führen wir noch ein weiteres Polartetraeder, das „Bezugstetraeder" $\{\mathfrak{P}_0, \mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3\}$ ein, auf welches wir unseren Bewegungsvorgang beziehen und über dessen nähere Festlegung wir noch jeweils verfügen wollen. Die Kanten $\{\mathfrak{P}_0\,\mathfrak{P}_i\}$ dieses Bezugstetraeders besitzen die Richtungsvektoren

$$\mathfrak{r}_i = \mathfrak{P}_i\,\overline{\mathfrak{P}}_0,\quad \mathfrak{r}_i' = \overline{\mathfrak{P}}_0\,\mathfrak{P}_i.$$

Änderungen (Differentiale) gegenüber dem Gangraum R deuten wir

durch das Zeichen $\delta\ldots$ an, ebenso sei $\delta^*\ldots$ eine Änderung gegenüber R^*, während wir uns das übliche $d\ldots$ für Änderungen gegenüber dem Bezugstetraeder und dem damit starr verbundenen Bezugsraum, sowie natürlich für Änderungen von Funktionen vorbehalten.

Es gelten nun folgende Systeme von Ableitungsgleichungen für die Eckpunkte

$$\left.\begin{aligned}
\delta\mathfrak{P}_0 &= +\alpha_1\mathfrak{P}_1+\alpha_2\mathfrak{P}_2+\alpha_3\mathfrak{P}_3, & \delta^*\mathfrak{P}_0 &= +\alpha_1^*\mathfrak{P}_1+\alpha_2^*\mathfrak{P}_2+\alpha_3^*\mathfrak{P}_3,\\
\delta\mathfrak{P}_1 &= -\alpha_1\mathfrak{P}_0 +\beta_3\mathfrak{P}_2-\beta_2\mathfrak{P}_3, & \delta^*\mathfrak{P}_1 &= -\alpha_1^*\mathfrak{P}_0 +\beta_3^*\mathfrak{P}_2-\beta_2^*\mathfrak{P}_3,\\
\delta\mathfrak{P}_2 &= -\alpha_2\mathfrak{P}_0-\beta_3\mathfrak{P}_1 +\beta_1\mathfrak{P}_3, & \delta^*\mathfrak{P}_2 &= -\alpha_2^*\mathfrak{P}_0-\beta_3^*\mathfrak{P}_1 +\beta_1^*\mathfrak{P}_3,\\
\delta\mathfrak{P}_3 &= -\alpha_3\mathfrak{P}_0+\beta_2\mathfrak{P}_1-\beta_1\mathfrak{P}_2\ , & \delta^*\mathfrak{P}_3 &= -\alpha_3^*\mathfrak{P}_0+\beta_2^*\mathfrak{P}_1-\beta_1^*\mathfrak{P}_2\ .
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Für die Kantenvektoren $\mathfrak{r}_i$, $\mathfrak{r}_i'$ haben wir

$$\left.\begin{aligned}
\delta\,\mathfrak{r}_i &= \mathfrak{r}_j\,\omega_k - \mathfrak{r}_k\,\omega_j, & \delta^*\,\mathfrak{r}_i &= \mathfrak{r}_j\,\omega_k^* - \mathfrak{r}_k\,\omega_j^*,\\
\delta\,\mathfrak{r}_i' &= \mathfrak{r}_j'\,\omega_k' - \mathfrak{r}_k'\,\omega_j', & \delta^*\,\mathfrak{r}_i' &= \mathfrak{r}_j'\,\omega_k^{*\prime} - \mathfrak{r}_k'\,\omega_j^{*\prime}
\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

mit $i, j, k = 1, 2, 3; 2, 3, 1; 3, 1, 2$.

Hiebei besteht folgender Zusammenhang zwischen den linearen Differentialformen (*Pfaff*schen Formen)

$$\omega_i = \beta_i + \alpha_i,\ \omega_i' = \beta_i - \alpha_i,\ \omega_i^* = \beta_i^* + \alpha_i^*,\ \omega_i^{*\prime} = \beta_i^* - \alpha_i^*. \quad (3)$$

Bei zwangsläufigen Bewegungsvorgängen hängen sie von einem, bei flächenläufigen von zwei Parametern ab.

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{r}_1 g_1 + \mathfrak{r}_2 g_2 + \mathfrak{r}_3 g_3,\ \mathfrak{g}' = \mathfrak{r}_1' g_1' + \mathfrak{r}_2' g_2' + \mathfrak{r}_3' g_3'$$

seien die Richtungsvektoren einer Geraden allgemeiner Lage. Führen wir die *Pfaff*schen Drehvektoren

$$\left.\begin{aligned}
\omega &= \mathfrak{r}_1\omega_1 + \mathfrak{r}_2\omega_2 + \mathfrak{r}_3\omega_3, & \omega' &= \mathfrak{r}_1'\omega_1' + \mathfrak{r}_2'\omega_2' + \mathfrak{r}_3'\omega_3',\\
\omega^* &= \mathfrak{r}_1\omega_1^* + \mathfrak{r}_2\omega_2^* + \mathfrak{r}_3\omega_3^*, & \omega^{*\prime} &= \mathfrak{r}_1'\omega_1^{*\prime} + \mathfrak{r}_2'\omega_2^{*\prime} + \mathfrak{r}_3'\omega_3^{*\prime}
\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

ein, so ergibt sich

$$\delta\,\mathfrak{g} = \Sigma\,\mathfrak{r}_i\,dg_i + g_i\,(\mathfrak{r}_j\,\omega_k - \mathfrak{r}_k\,\omega_j) = \Sigma\,\mathfrak{r}_i\,(dg_i - g_j\,\omega_k + g_k\,\omega_j) = d\,\mathfrak{g} + \omega \times \mathfrak{g},$$

ebenso

$$\delta\,\mathfrak{g}' = d\mathfrak{g}' + \omega' \times \mathfrak{g}',\ \delta^*\,\mathfrak{g} = d\mathfrak{g} + \omega^* \times \mathfrak{g},\ \delta^*\,\mathfrak{g}' = d\mathfrak{g}' + \omega^{*\prime} \times \mathfrak{g}'.$$

Ist die Gerade $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}']$ im Gangraum R befestigt, so gilt $\delta\,\mathfrak{g} = \delta\,\mathfrak{g}' = 0$ und haben wir in

$$\delta^*\,\mathfrak{g} = (\omega^* - \omega) \times \mathfrak{g} = \psi \times \mathfrak{g},\ \delta^*\,\mathfrak{g}' = (\omega^{*\prime} - \omega') \times \mathfrak{g}' = \psi' \times \mathfrak{g}' \quad (5)$$

ihre Änderungen gegenüber dem Rastraum R^*. Die beiden Vektoren

$$\psi = \omega^* - \omega = \Sigma\,\mathfrak{r}_i\,\psi_i,\ \ \psi' = \omega^{*\prime} - \omega' = \Sigma\mathfrak{r}_i'\,\psi_i'$$

kennzeichnen nun die Momentanschraube $\{\psi, \psi'\}$ unseres Bewegungsvorganges und stellen auf den beiden Bildkugeln die Drehvektoren der zugehörigen Momentandrehungen dar. Setzt man

$$\psi = \psi_0\, \mathfrak{p}, \quad \psi' = \psi_0'\, \mathfrak{p}', \quad (\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}) = (\mathfrak{p}'\,\mathfrak{p}') = 1,$$

somit also

$$\psi_0^2 = (\psi\,\psi), \quad \psi_0'^2 = (\psi'\,\psi'),$$

so erhält man als Achsen der Momentanschraubung [3] die Geraden $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}']$ und $[\mathfrak{p}, -\mathfrak{p}']$, die zueinander polar sind. Bezogen auf die erstere ist etwa $\frac{1}{2}(\psi_0' - \psi_0)$ der infinitesimale Schiebwinkel und $-\frac{1}{2}(\psi_0' + \psi_0)$ der infinitesimale Drehwinkel. Mit der Momentanschraube ist ein Strahlgewinde (linearer Strahlkomplex) verbunden, dem die Gleichung

$$(\psi\,\mathfrak{g}) - (\psi'\,\mathfrak{g}') = 0$$

zukommt. $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}']$ und $[\mathfrak{p}, -\mathfrak{p}']$ sind Achsen dieses Gewindes; zusammengefaßt bezeichnen wir sie nach *E. Study* und *E. A. Weiß*[4] als das „Linienkreuz der Achsen" oder kurz als „Achsenkreuz" des Linearen Komplexes.

Wird das Bezugstetraeder um die Kante $[\mathfrak{r}_3, \mathfrak{r}_3']$ verschraubt, so haben wir bei einem Schiebwinkel $\vartheta - \vartheta'$ und einem Drehwinkel $\vartheta + \vartheta'$

$$\left.\begin{aligned} \hat{\mathfrak{r}}_1 &= \mathfrak{r}_1 \cos 2\,\vartheta - \mathfrak{r}_2 \sin 2\,\vartheta, & \hat{\mathfrak{r}}_1' &= \mathfrak{r}_1' \cos 2\,\vartheta' - \mathfrak{r}_2' \sin 2\,\vartheta', \\ \hat{\mathfrak{r}}_2 &= \mathfrak{r}_1 \sin 2\,\vartheta + \mathfrak{r}_2 \cos 2\,\vartheta, & \hat{\mathfrak{r}}_2' &= \mathfrak{r}_1' \sin 2\,\vartheta' + \mathfrak{r}_2' \cos 2\,\vartheta', \\ \hat{\mathfrak{r}}_3 &= \mathfrak{r}_3 & \hat{\mathfrak{r}}_3' &= \mathfrak{r}_3'. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Aus (2) entnimmt man, wie sich hiebei die *Pfaff*schen Formen transformieren

$$\left.\begin{aligned} \hat{\omega}_1 &= \omega_1 \cos 2\,\vartheta - \omega_2 \sin 2\,\vartheta, & \hat{\omega}_1' &= \omega_1' \cos 2\,\vartheta' - \omega_2' \sin 2\,\vartheta', \\ \hat{\omega}_2 &= \omega_1 \sin 2\,\vartheta + \omega_2 \cos 2\,\vartheta, & \hat{\omega}_2' &= \omega_1' \sin 2\,\vartheta' + \omega_2' \cos 2\,\vartheta', \\ \hat{\omega}_3 &= \omega_3 - 2\,d\,\vartheta, & \hat{\omega}_3' &= \omega_3' - 2\,d\,\vartheta'. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Zwei genau gleiche Systeme gelten auch für die gestirnten ω, also für die Änderungen gegenüber R^*.

Wegen

---

[3] Eine Änderung der Orientierung von $\mathfrak{p}$ oder $\mathfrak{p}'$ ist an eine Vorzeichenänderung von ψ_0 bzw. ψ_0' gebunden.

[4] *E. A. Weiß*, Einführung in die Liniengeometrie und Kinematik, Teubners Math. Leitfaden, Bd. 41, Leipzig—Berlin (1935).

$$\psi_i = \omega_i^* - \omega_i, \quad \psi_i' = \omega_i^{*'} - \omega_i'$$

schreiben sich die Zeiger der Momentanschraube im neuen Bezugssystem in der Form

$$\left.\begin{array}{ll} \hat{\psi}_1 = \psi_1 \cos 2\vartheta - \psi_2 \sin 2\vartheta, & \hat{\psi}_1' = \psi_1' \cos 2\vartheta' - \psi_2' \sin 2\vartheta', \\ \hat{\psi}_2 = \psi_1 \sin 2\vartheta + \psi_2 \cos 2\vartheta, & \hat{\psi}_2' = \psi_1' \sin 2\vartheta' + \psi_2' \cos 2\vartheta', \\ \hat{\psi}_3 = \psi_3, & \hat{\psi}_3' = \psi_3'. \end{array}\right\} \quad (8)$$

Wählt man bei einem eingliedrigen Bewegungsvorgang das Bezugstetraeder so, daß die Kante $[\mathfrak{r}_3, \mathfrak{r}_3']$ jeweils in die eine Achse der Momentanschraube, die polare Kante $[\mathfrak{r}_3, -\mathfrak{r}_3']$ in die andere Achse fällt, so gilt

$$\psi_1 = \psi_1' = \psi_2 = \psi_2' = 0 \text{ oder } \omega_i^* = \omega_i, \omega_i^{*'} = \omega_i', \ (i = 1, 2).$$

Verschraubt man das Tetraeder dann noch in geeigneter Weise um diese Achsen, d. h. bestimmt die Winkel ϑ und ϑ' so, daß etwa $\omega_1 = \omega_1' = 0$ wird, so vereinfacht sich das System der Ableitungsgleichungen (2). Aus

$$\delta \mathfrak{r}_3 = \delta^* \mathfrak{r}_3 = \mathfrak{r}_1 \omega_2, \quad \delta \mathfrak{r}_3' = \delta^* \mathfrak{r}_3' = \mathfrak{r}_1' \omega_2'$$

erkennt man sofort, daß im elliptischen Raum die bewegliche Achsenfläche des Gangraumes auf der festen Achsenfläche des Rastraumes schrotet, was dem Abrollen der Polkurven der zugehörigen Drehvorgänge auf der linken, wie rechten Bildkugel entspricht[5].

2.

Bei flächenläufigen Bewegungsvorgängen treten zu den Ableitungsgleichungen (1) und (2) noch die Systeme von Integrierbarkeitsbedingungen hinzu. Verwenden wir alternierende (polare) Produkte, sowie äußere Ableitungen von Differentialformen, so lauten diese

$$\left.\begin{array}{ll} d\omega_i = -[\omega_j \ \omega_k], & d\omega_i' = -[\omega_j' \ \omega_k'], \\ d\omega_i^* = -[\omega_j^* \omega_k^*], & d\omega_i^{*'} = -[\omega_j^{*'} \omega_k^{*'}]. \end{array}\right\} \quad (9)$$

Nach (3) kann man dafür auch schreiben:

$$\left.\begin{array}{ll} d\alpha_i = -[\alpha_j \ \beta_k] - [\beta_j \ \alpha_k], & d\beta_i = -[\alpha_j \ \alpha_k] - [\beta_j \ \beta_k], \\ d\alpha_i^* = -[\alpha_j^* \beta_k^*] - [\beta_j^* \alpha_k^*], & d\beta_i^* = -[\alpha_j^* \alpha_k^*] - [\beta_j^* \beta_k^*]. \end{array}\right\} \quad (10)$$

Die Momentanschrauben $\{\psi, \psi'\}$ hängen nun für eine bestimmte Stelle u, v noch von der Fortschreitungsrichtung $du : dv$ innerhalb des zwei-

[5] Vgl. *R. Garnier*, l. c. S. 275.

gliedrigen Bewegungsvorganges ab und bilden ein Büschel (lineare eingliedrige Schar); die zugehörigen Strahlgewinde bilden ein Gewindebüschel.

Eine beliebige, im Gangraum R befestigte Gerade $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}']$ durchläuft eine Strahlkongruenz. Der linke Richtungsvektor $\mathfrak{g}$ beschreibt hiebei auf der linken Bildkugel das vektorielle Flächenelement

$$\delta^* \mathfrak{f} = \tfrac{1}{2}[\delta^* \mathfrak{g} \times \delta^* \mathfrak{g}] = \{g_1 [\psi_2 \psi_3] + g_2 [\psi_3 \psi_1] + g_3 [\psi_1 \psi_2]\} \mathfrak{g},$$

während dem rechten sphärischen Bildvektor $\mathfrak{g}'$ das vektorielle Flächenelement

$$\delta^* \mathfrak{f}' = \tfrac{1}{2}[\delta^* \mathfrak{g}' \times \delta^* \mathfrak{g}'] = \{g_1' [\psi_2' \psi_3'] + g_2' [\psi_3' \psi_1'] + g_3' [\psi_1' \psi_2']\} \mathfrak{g}'$$

zukommt. Dies legt nun die Einführung der beiden „Doppeldifferentialvektoren"

$$\left.\begin{aligned} \mu &= \tfrac{1}{2}[\psi \times \psi] = \mathfrak{r}_1 [\psi_2 \psi_3] + \mathfrak{r}_2 [\psi_3 \psi_1] + \mathfrak{r}_3 [\psi_1 \psi_2], \\ \mu' &= \tfrac{1}{2}[\psi' \times \psi'] = \mathfrak{r}_1' [\psi_2' \psi_3'] + \mathfrak{r}_3' [\psi_3' \psi_1'] + \mathfrak{r}_3' [\psi_1' \psi_2'] \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

nahe. Sie sind von der Wahl des Bezugstetraeders unabhängig, da sie gestatten, die skalaren Flächenelemente df, df' der Kugelbilder der Geraden $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}']$ als Skalarprodukte zu schreiben:

$$\left.\begin{aligned} df &= (\mu\ \mathfrak{g}) = g_1 [\psi_2 \psi_3] + g_2 [\psi_3 \psi_1] + g_3 [\psi_1 \psi_2], \\ df' &= (\mu'\ \mathfrak{g}') = g_1' [\psi_2' \psi_3'] + g_2' [\psi_3' \psi_1'] + g_3' [\psi_1' \psi_2']. \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Es kommt den Vektoren μ, μ' somit eine geometrische Bedeutung für unseren zweigliedrigen Bewegungsvorgang zu. Wir wollen erst einmal

$$\mu \neq 0, \quad \mu' \neq 0 \quad (13)$$

voraussetzen; der Bewegungsvorgang hängt dann gewiß von zwei wesentlichen Parametern ab. Durch das Vektorpaar $\{\mu, \mu'\}$ sind nun (abgesehen von der Orientierung) zwei polare Gerade $[\mathfrak{q}, \mathfrak{q}']$ und $[\mathfrak{q}, -\mathfrak{q}']$ bestimmt. Wir nennen sie die „Polachsen" des flächenläufigen Bewegungsvorganges. Für sie gilt

$$\mu = \mu_0 \mathfrak{q}, \quad \mu' = \mu_0' \mathfrak{q}', \quad (\mathfrak{q}\,\mathfrak{q}) = (\mathfrak{q}'\,\mathfrak{q}') = 1, \quad \mu_0^2 = (\mu\,\mu), \quad \mu_0'^2 = (\mu'\,\mu').$$

Wir untersuchen nun für eine Stelle u, v das Büschel der Momentanschrauben, d. h. die Lage der ∞^1 Linienkreuze der Momentanachsen $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}']$, $[\mathfrak{p}, -\mathfrak{p}']$ zu den beiden Polachsen $[\mathfrak{q}, \mathfrak{q}']$ und $[\mathfrak{q}, -\mathfrak{q}']$. Es gilt, wie man durch einen Ansatz $\psi_i = a_i\, du + b_i\, dv$ sofort sieht, bei gewöhnlicher (nicht alternierender) Skalarproduktbildung

$$(\psi\,\mu) = (\psi'\,\mu') = 0 \quad (14)$$

und somit auch

$$(\mathfrak{p}\ \mathfrak{q}) = (\mathfrak{p}'\ \mathfrak{q}') = 0.$$

Sämtliche Momentanachsen schneiden daher die Polachsen rechtwinkelig; sie bilden im früher betrachteten Komplexbüschel somit die Achsenfläche {Regelfläche vierter Ordnung erster Art}, deren Leitgeraden die beiden Polachsen sind[6].

3.

Zu unserem zweigliedrigen Bewegungsvorgang gehört nun in beiden Räumen R und R^* je ein Strahlensystem, das dort von den Polachsen jeweils gebildet wird; wir bezeichnen dieses Strahlensystem mit S bzw. S^*. Um dieses Paar von aufeinander bezogenen Geradenscharen näher zu untersuchen, wollen wir über das noch ganz willkürliche Bezugstetraeder einmal so verfügen, daß etwa die Kante $[\mathfrak{r}_3, \mathfrak{r}_3']$ in eine der Polachsen des flächenläufigen Bewegungsvorganges fällt. (Die andere Polachse ist dann die polare Tetraederkante.) Es gelte

$$\mathfrak{r}_3 = \mathfrak{q},\ \mathfrak{r}_3' = \mathfrak{q}',\ \mu = \mathfrak{r}_3\,[\psi_1\ \psi_2],\ \mu' = \mathfrak{r}_3'\,[\psi_1'\ \psi_2'],$$

also

$$[\psi_2\ \psi_3] = [\psi_3\ \psi_1] = [\psi_2'\ \psi_3'] = [\psi_3'\ \psi_1'] = 0.$$

Nach unserer Voraussetzung (13) ist aber nun

$$[\psi_1\ \psi_2] \neq 0,\ [\psi_1'\ \psi_2'] \neq 0,$$

was sofort

$$\psi_3 = \psi_3' = 0$$

nach sich zieht. Wir haben also

$$\omega_3^* = \beta_3^* + \alpha_3^* = \beta_3 + \alpha_3 = \omega_3, \quad \omega_3^{*\prime} = \beta_3^* - \alpha_3^* = \beta_3 - \alpha_3 = \omega_3'$$

oder

$$\alpha_3^* = \alpha_3, \quad \beta_3^* = \beta_3. \tag{15}$$

Das Bezugstetraeder wurde bisher nur bis auf Schraubungen um die Polachse festgelegt. Eine solche Schraubung ist durch (6) gegeben und transformiert die *Pfaff*schen Formen nach (7) und (8). Die Winkel ϑ, ϑ' können nun immer so gewählt werden, daß

$$[\hat{\psi}_1\ \hat{\psi}_1'] = [\hat{\psi}_2\ \hat{\psi}_2'] = 0$$

wird. Wir wollen statt $\hat{\psi}_i$ nun wiederum ψ_i schreiben und das so verschraubte Bezugstetraeder als *kanonisch* bezeichnen.

---

[6] Vgl. *E. A. Weiß*, l. c. S. 71.

Bei Wahl dieses kanonischen Bezugstetraeders ergibt sich nun unmittelbar die Richtigkeit der Beziehung (14). Aus den Integrierbarkeitsbedingungen (9) folgern wir

$$[\omega_1^* \omega_2^*] = [\omega_1 \omega_2],\ [\omega_1^{*'} \omega_2^{*'}] = [\omega_1' \omega_2']. \qquad (16)$$

Dies läßt wegen

$$\delta\ \mathfrak{r}_3 = \mathfrak{r}_1 \omega_2\ - \mathfrak{r}_2 \omega_1\ ,\quad \delta\ \mathfrak{r}_3' = \mathfrak{r}_1' \omega_2'\ - \mathfrak{r}_2' \omega_1',$$
$$\delta^* \mathfrak{r}_3 = \mathfrak{r}_1 \omega_2^* - \mathfrak{r}_2 \omega_1^*,\quad \delta^* \mathfrak{r}_3' = \mathfrak{r}_1' \omega_2^{*'} - \mathfrak{r}_2' \omega_1^{*'}$$

folgende geometrische Deutung zu:

Die linken Kugelbilder der beiden Scharen S und S^* sind flächentreu aufeinander bezogen; gleiches gilt von den rechten Kugelbildern.

Die beiden Scharen S, S^* können auch noch in anderer Weise gekennzeichnet werden: In der u, v-Ebene betrachten wir (innerhalb des Definitionsbereiches) ein einfach zusammenhängendes Flächenstück; seiner Randkurve entspricht ein geschlossener zwangsläufiger Bewegungsvorgang, der ganz in unserem zweigliedrigen Bewegungsvorgang enthalten ist. Die zugehörigen Polachsen bilden nun je eine geschlossene Strahlfläche, die ganz im System S bzw. S^* liegt. Wir fassen nun im Gangraum R auf der Erzeugenden $[\mathfrak{q}, \mathfrak{q}'] = [\mathfrak{r}_3, \mathfrak{r}_3']$ von S einen Punkt $\mathfrak{P}$ ins Auge und können ihn wegen der speziellen Wahl des Bezugssystems in der Form

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_0 \cos\varphi - \mathfrak{P}_3 \sin\varphi$$

ansetzen. Der Punkt $\mathfrak{P}$ beschreibt auf der geschlossenen Strahlfläche eine rechtwinkelige Querlinie, durchsetzt also die Erzeugenden senkrecht, wenn

$$(\mathfrak{P}_0\, \delta\, \mathfrak{P}) = -(\mathfrak{P}_0\, \delta\, \mathfrak{P}_3) \sin\varphi - \sin\varphi\, d\varphi = 0$$

gilt, was wegen (1)

$$d\varphi = \alpha_3 \quad \text{oder} \quad \varphi = \int \alpha_3 + \varphi_0$$

bei festem φ_0 bedeutet. — Nach einem geschlossenen Umlauf um die Regelfläche wird die Ausgangserzeugende in einem Punkt in der Entfernung

$$\oint \alpha_3$$

getroffen; für diese Integralinvariante, die von der Wahl des Ausgangspunktes unabhängig ist, führte in der Euklidischen Geometrie *W. Blaschke* die Bezeichnung „Öffnung" ein. In Hinblick auf das Folgende scheint es hier angebracht, genauer etwa von einer „Öffnungsstrecke" zu sprechen[7]. Wir umschreiben nämlich unserer geschlossenen Strahlfläche

[7] Vgl. *H. R. Müller*, Mh. f. Math. **55** (1951), 206—214.

in dualer Weise so eine Torse, daß deren Erzeugenden jeweils auf den Erzeugenden der Strahlfläche senkrecht stehen. Diese Torse schließt sich im allgemeinen bei einem Umlauf um die Strahlfläche nicht, sondern gelangt unter dem „Öffnungswinkel" geneigt zur Ausgangserzeugenden zurück. Diese Torse ist polar zu einer rechtwinkeligen Querlinie der Kante $\{\mathfrak{P}_1\ \mathfrak{P}_2\}$ unseres Tetraeders. Soll der Punkt

$$\mathfrak{Q} = \mathfrak{P}_1 \cos\psi - \mathfrak{P}_2 \sin\psi$$

diese Kante im Zuge des Umlaufes um die geschlossene Strahlfläche rechtwinkelig durchsetzen, so muß

$$(\mathfrak{P}_1\, \delta\, \mathfrak{Q}) = -(\mathfrak{P}_1\, \delta\, \mathfrak{P}_2) \sin\psi - \sin\psi\, d\psi = 0$$

sein, was $d\psi = \beta_3$ und somit

$$\psi = \int \beta_3 + \psi_0$$

bei festem ψ_0 mit sich bringt. Daher ist $\oint \beta_3$ der Öffnungswinkel.

Gleiches kann man nun im Rastraum R^* für die entsprechende geschlossene Strahlfläche innerhalb S^* ausführen. Wegen (15) hat man nun den Satz: *Die beiden Strahlsysteme S und S^*, die von der Polachse in Gang bzw. Rastraum gebildet werden, sind so aufeinander bezogen, daß für jedes Paar entsprechender geschlossener Regelflächen Übereinstimmung der Öffnungsstrecken und Öffnungswinkel erfolgt*[8].

Wir wollen kurz sagen, die beiden Systeme S und S^* sind *öffnungstreu* aufeinander bezogen.

4.

Wir nehmen nun umgekehrt zwei Strahlsysteme S und S^* an, die öffnungstreu aufeinander bezogen sind, und fragen, wie weit dadurch ein zweigliedriger Bewegungsvorgang im elliptischen Raum bestimmt ist. Wir denken uns in den beiden Räumen R und R^*, in denen diese Scharen liegen, zwei Bezugstetraeder erst einmal so gewählt, daß entsprechende Strahlen mit einem Paar entsprechender Tetraederkanten zusammenfallen, also etwa, daß $[q, q'] = [\mathfrak{r}_3, \mathfrak{r}_3']$ und $[q^*, q^{*\prime}] = [\mathfrak{r}_3^*, \mathfrak{r}_3^{*\prime}]$ sind. In beiden Räumen gelten nun für die Änderungen der Bezugstetraeder gegenüber raumfesten Ausgangstetraedern Systeme von Ableitungsgleichungen und Integrierbarkeitsbedingungen, wie sie früher in (1)

[8] Im Euklidischen Fall wies *W. Blaschke* die Flächentreue der sphärischen Bilder von S und S^*, sowie die Übereinstimmung der Öffnungen (Öffnungsstrecken) nach. Erstere Eigenschaft kann aber nach dem Satze von *Gauß* und *Bonnet* sofort auf die Übereinstimmung der Gesamtkrümmungen der sphärischen Bilder, d. h. also der Öffnungswinkel zurückgeführt werden.

und (2) bzw. (9) und (10) aufgestellt wurden. Nach Voraussetzung gilt nun (16) oder

$$d\,\psi_3 = d\,(\omega_3^* - \omega_3) = 0,\ d\,\psi_3' = d\,(\omega_3^{*\prime} - \omega_3') = 0.$$

Die Formen $\psi_3 = \omega_3^* - \omega_3$ und $\psi_3' = \omega_3^{*\prime} - \omega_3'$ sind also vollständige Differentiale. Nun verschrauben wir etwa das Tetraeder, auf das der Gangraum R bezogen ist, um die Achse $[\mathfrak{r}_3, \mathfrak{r}_3']$, während wir in R^* das Bezugstetraeder festhalten, d. h. belassen. Nach (7) gilt dann

$$\hat{\omega}_3 = \omega_3 - 2\,d\,\vartheta,\quad \hat{\omega}_3' = \omega_3' - 2\,d\,\vartheta$$

und somit

$$\hat{\psi}_3 = \hat{\omega}_3^* - \hat{\omega}_3 = (\omega_3^* - \omega_3) + 2\,d\,\vartheta = \psi_3 + 2\,d\,\vartheta,$$
$$\hat{\psi}_3' = \hat{\omega}_3^{*\prime} - \hat{\omega}_3' = (\omega_3^{*\prime} - \omega_3') + 2\,d\,\vartheta' = \psi_3' + 2\,d\,\vartheta'.$$

Wegen der Geschlossenheit der Formen ψ_3 und ψ_3' können wir nun über die Winkel ϑ, ϑ' unserer Schraubung so verfügen, daß

$$\hat{\psi}_3 = \hat{\psi}_3' = 0$$

wird. Die Winkel ϑ und ϑ' sind wegen

$$2\,\vartheta = \int(\omega_3 - \omega_3^*) + 2\,\vartheta_0,\ 2\,\vartheta' = \int(\omega_3' - \omega_3^{*\prime}) + 2\,\vartheta_0'$$

nur bis auf zwei additive Konstante ϑ_0 und ϑ_0' bestimmt. Lassen wir nun entsprechende Tetraederkanten zusammenfallen, wählen also $[\mathfrak{r}_i^*, \mathfrak{r}_i^{*\prime}] = [\mathfrak{r}_i, \mathfrak{r}_i']$, so ergeben die Lageänderungen der beiden Räume R und R^* gegen einander einen zweigliedrigen Bewegungsvorgang.

Sind somit zwei Strahlsysteme öffnungstreu aufeinander abgebildet, so gibt es immer einen bis auf zwei feste Worte ϑ_0 und ϑ_0' eindeutig erklärten flächenläufigen Bewegungsvorgang, dessen Polachsen in Gang-, wie Rastraum die beiden Strahlsysteme bilden.

Die mit einem flächenläufigen Bewegungsvorgang verbundenen Strahlsysteme S und S^* können auch so aufeinander bezogen sein, daß neben (16) sogar

$$[\omega_1^*\,\omega_2^*] = [\omega_1\,\omega_2] = 0$$

oder

$$[\omega_1^{*\prime}\,\omega_2^{*\prime}] = [\omega_1'\,\omega_2'] = 0$$

gilt, oder auch, daß diese Beziehungen beide gleichzeitig erfüllt sind. Auf der betreffenden Bildkugel werden dann nach *W. Blaschke* die Richtungsvektoren der Strahlen von S und S^* auf je eine Kurve beschränkt bleiben, wobei der durch den zweigliedrigen Bewegungsvorgang auf der Bildkugel induzierte zweigliedrige Drehvorgang jeweils so

entsteht, daß sphärische Evolventen dieser Kurven einander stets berühren. Für die zweigliedrigen Geradenscharen S und S^* in Gang bzw. Rastraum hat dies zur Folge, daß sie eine Zerlegung in eine einparametrige Schar von *Clifford*schen Links- oder Rechtszylindern oder beides gleichzeitig gestatten. In letzterem Fall bestehen die Strahlsysteme aus den Flächennormalen abwickelbarer (Schieb-)Flächen, die von *L. Bianchi* näher untersucht worden sind.

5.

Nun wenden wir uns örtlichen Eigenschaften unserer zweigliedrigen Bewegungsvorgänge zu und fragen zunächst nach dem Ort aller Geraden $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}']$ des Gangraumes, die an der betrachteten Stelle ein *Normalensystem* bilden. Für diese „Normalgeraden" müssen also die Richtungskugeln gleichsinnig flächentreu aufeinander bezogen sein. Für die skalaren Flächenelemente der Kugelbilder einer im Gangraum R befestigten Geraden $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}']$ fanden wir (12). Ihre Übereinstimmung, somit

$$(\mu\,\mathfrak{g}) = (\mu'\,\mathfrak{g}') \quad \text{oder} \quad \Sigma\,(\mu_i\,g_i - \mu_i'\,g_i') = 0$$

liefert eine lineare Gleichung in Geradenkoordinaten[9], also die Gleichung eines *Strahlgewindes*, das im Euklidischen Fall nach *A. Ribaucour* benannt wird[10]. Man kann dieses Gewinde auch so erklären, daß man nach jenen Geraden des Gangraumes fragt, deren Momente bezüglich der durch das Vektorpaar $\{\mu, \mu'\}$ bestimmten „Schraube" verschwinden. Die Polachsen unseres Bewegungsvorganges sind Achsen dieses Gewindes.

Schließlich untersuchen wir noch die Gesamtheit aller Geraden des Gangraumes, die bezüglich sämtlicher Schrauben $\{\psi, \psi'\}$ des Büschels der Momentanschrauben ein verschwindendes Moment besitzen; sie gehören sämtlichen Gewinden des zugehörigen Gewindebüschels an, erfüllen also ein *Strahlnetz* (lineare Kongruenz). Um aus

$$(\psi\,\mathfrak{g}) - (\psi'\,\mathfrak{g}') = 0$$

oder ausführlicher

$$\Sigma\,(\psi_i\,g_i - \psi_i'\,g_i') = 0$$

eine von $du : dv$ freie Darstellung zu finden, multiplizieren wir äußerlich mit ψ_i und finden für $i = 1, 2, 3$

---

[9] Der Zusammenhang mit den *Plücker*schen Geradenzeigern ist durch

$$g_i = g_{oi} + g_{jk},\ g_i' = g_{oi} - g_{jk}$$

gegeben.

[10] *A. Ribaucour*, C. R. Paris **76** (1873), 1347.

$$\left.\begin{aligned} g_2\,[\psi_1\,\psi_2] - g_3\,[\psi_3\,\psi_1] - \Sigma\, g_i'\,[\psi_1\,\psi_i'] &= 0,\\ g_3\,[\psi_2\,\psi_3] - g_1\,[\psi_1\,\psi_2] - \Sigma\, g_i'\,[\psi_2\,\psi_i'] &= 0,\\ g_1\,[\psi_3\,\psi_1] - g_2\,[\psi_2\,\psi_3] - \Sigma\, g_i'\,[\psi_3\,\psi_i'] &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Von diesen Gleichungen sind im allgemeinen nur zwei linear unabhängig. Man folgert daraus leicht die Beziehung

$$\sum_{i,n=1}^{3} g'_n\,[\psi_i\,\psi'_n]\cdot[\psi_j\,\psi_k] = 0$$

für beliebige Werte g'_n, was

$$\Sigma\,[\psi_i\,\psi'_n]\cdot[\psi_j\,\psi_k] = 0 \qquad (n = 1, 2, 3)$$

zur Folge hat. (i, j, k durchlaufe hiebei immer die zyklischen Anordnungen, 1, 2, 3; 2, 3, 1; 3, 1, 2.) — Durch Multiplikation mit ψ_i' erhalten wir statt (17) das Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} \Sigma\, g_i\,[\psi_i\,\psi_1'] + g_2'\,[\psi_1'\,\psi_2'] - g_3'\,[\psi_3'\,\psi_1'] &= 0,\\ \Sigma\, g_i\,[\psi_i\,\psi_2'] + g_3'\,[\psi_2'\,\psi_3'] - g_1'\,[\psi_1'\,\psi_2'] &= 0,\\ \Sigma\, g_i\,[\psi_i\,\psi_3'] + g_1'\,[\psi_3'\,\psi_1'] - g_2'\,[\psi_2'\,\psi_3'] &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

das im allgemeinen gleichfalls den Rang zwei besitzt. Hieraus folgen wiederum die Beziehungen

$$\Sigma\,[\psi_n\,\psi_i']\cdot[\psi_j'\,\psi_k'] = 0 \qquad (n = 1, 2, 3).$$

Bei Wahl des kanonischen Bezugssystems vereinfachen sich die Gleichungen (17), (18).

Obigem Strahlnetz können wir noch eine andere geometrische Deutung geben, die für Euklidische Metrik auf *Th. Schönemann* zurückgeht[11]. Wir suchen die Flächennormalen der Bahnflächen eines beliebigen Punktes $\mathfrak{Q}$, der im Gangraum befestigt ist. Wir wollen uns zwecks Vereinfachung das Bezugstetraeder einmal so gewählt denken, daß die Ecke $\mathfrak{P}_0$ in den Punkt $\mathfrak{Q}$ fällt; eine weitere Festlegung behalten wir uns noch vor. Für die Bewegung des Punktes $\mathfrak{P}_0$ gegenüber dem System R gilt dann nach (1) die Rastbedingung

$$\delta\,\mathfrak{P}_0 = \alpha_1\,\mathfrak{P}_1 + \alpha_2\,\mathfrak{P}_2 + \alpha_3\,\mathfrak{P}_3 = 0 \quad \text{oder} \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0.$$

Für eine bestimmte Fortschreitungsrichtung $du : dv$ ist nun die Bahntangente von $\mathfrak{P}_0$ durch

$$\delta^*\,\mathfrak{P}_0 = \alpha_1^*\,\mathfrak{P}_1 + \alpha_2^*\,\mathfrak{P}_2 + \alpha_3^*\,\mathfrak{P}_3$$

gegeben und kann durch das (nicht normierte) Vektorpaar

---

[11] *Th. Schönemann*, Berl. Ber. (1855), 255.

$$\mathfrak{r} = \delta^* \mathfrak{P}_0 \cdot \overline{\mathfrak{P}}_0 = \alpha_1^* \mathfrak{r}_1 + \alpha_2^* \mathfrak{r}_2 + \alpha_3^* \mathfrak{r}_3,$$
$$\mathfrak{r}' = \overline{\mathfrak{P}}_0 \cdot \delta^* \mathfrak{P}_0 = \alpha_1^* \mathfrak{r}_1' + \alpha_2^* \mathfrak{r}_2' + \alpha_3^* \mathfrak{r}_3'$$

erfaßt werden. Bei Variieren von $du : dv$ erhalten wir das Büschel der Bahntangenten, das in der Tangentialebene der Bahnfläche des Punktes liegt; die beiden (nicht normierten) Vektoren

$$\mathfrak{n} = \tfrac{1}{2}[\mathfrak{r} \times \mathfrak{r}] = \mathfrak{r}_1 [\alpha_2^* \alpha_3^*] + \mathfrak{r}_2 [\alpha_3^* \alpha_1^*] + \mathfrak{r}_3 [\alpha_1^* \alpha_2^*],$$
$$\mathfrak{n}' = \tfrac{1}{2}[\mathfrak{r}' \times \mathfrak{r}'] = \mathfrak{r}_1' [\alpha_2^* \alpha_3^*] + \mathfrak{r}_2' [\alpha_3^* \alpha_1^*] + \mathfrak{r}_3' [\alpha_1^* \alpha_2^*]$$

kennzeichnen die Flächennormale. Verfügen wir noch so über das Bezugstetraeder, daß eine Kante in diese Normale der Bahnfläche fällt, also $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{r}_3$, sowie $\mathfrak{n}'$ und $\mathfrak{r}_3'$ jeweils die gleichen Richtungen festlegen, so muß

$$[\alpha_2^* \alpha_3^*] = [\alpha_3^* \alpha_1^*] = 0 \quad \text{oder} \quad \alpha_3^* = 0$$

sein. Dies hat wiederum $\psi_3 = \psi_3'$ zur Folge. Nun sieht man sofort, daß *die Bahnnormale im Netz von Schönemann liegt*, denn für

$$g_1 = g_2 = g_1' = g_2' = 0, \quad g_3 = g_3' = 1$$

sind (17) und (18) erfüllt.

6.

Nun lassen wir die Voraussetzung (13) fallen und betrachten zweigliedrige Bewegungsvorgänge, bei denen einer der beiden Doppeldifferentialvektoren μ oder μ' verschwindet. Es sei also etwa

$$\mu = 0, \ \mu' \neq 0 \tag{19}$$

oder

$$[\psi_2 \psi_3] = [\psi_3 \psi_1] = [\psi_1 \psi_2] = 0.$$

Die lineare Abhängigkeit der ψ_i kann auch durch die Schreibweise

$$\psi_i = c_i \hat{\psi}_0 \tag{20}$$

ausgedrückt werden, wobei $\hat{\psi}_0$ eine lineare Differentialform in zwei Veränderlichen ist.

Eine im Gangraum befestigte Gerade $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}']$ durchläuft ein Strahlsystem, dessen linkes sphärisches Bild wegen (12) ein verschwindendes skalares Flächenelement df besitzt, somit also auf eine Kurve beschränkt bleibt. Den einzelnen Punkten dieser von $\mathfrak{g}$ beschriebenen Kurve entsprechen somit auf der rechten Bildkugel jeweils Kurven als Ort von $\mathfrak{g}'$.

Wird eine Gerade im Gangraum befestigt, so durchläuft sie bei einem zweigliedrigen Bewegungsvorgang mit der Bedingung (19) *eine Strahlkongruenz, die eine Zerlegung in* ∞^1 *Linkszylinder zuläßt.*

Die Gleichung des Strahlgewindes von *Ribaucour* vereinfacht sich im Falle (19) auf

$$(\mu'\, \mathfrak{g}') = 0;$$

der linke Richtungsvektor $\mathfrak{g}$ ist an keine Bedingung gebunden.

Das Gewinde von Ribaucour gestattet somit eine Zerlegung in ∞^1 *Netze von rechtsparallelen Geraden*[12].

Die Frage nach den Geraden des Gangraumes, deren Momente bezüglich sämtlicher Momentanschrauben $\{\psi, \psi'\}$ verschwinden, führte auf das System (17), das sich wegen (19), (20) auf

$$\Sigma\, g_i' \,[\psi_n\, \psi_i'] = 0 \qquad (n = 1, 2, 3)$$

oder

$$\Sigma\, g_i' \,[\hat{\psi}_0\, \psi_i'] = 0 \tag{21}$$

vereinfacht und den Rang eins besitzt; hingegen tritt bei (18) im allgemeinen keine Rangerniedrigung ein. Führen wir den Doppeldifferentialvektor

$$\hat{\mu} = \mathfrak{r}_1' \,[\hat{\psi}_0\, \psi_1'] + \mathfrak{r}_2' \,[\hat{\psi}_0\, \psi_2'] + \mathfrak{r}_3' \,[\hat{\psi}_0\, \psi_3']$$

ein, so können wir statt (21) kurz

$$(\hat{\mu}\, \mathfrak{g}') = 0 \tag{22}$$

schreiben. Die Gewinde mit den Gleichungen (18) und (21) gehören nun einem Büschel an und besitzen ein gemeinsames Strahlnetz von bemerkenswerten Eigenschaften. Dieses Gewindebüschel gestattet wegen (22) die Darstellung

$$(\lambda\, \mathfrak{g}) - (\lambda'\, \mathfrak{g}') - p\,(\hat{\mu}\, \mathfrak{g}') = 0,$$

wobei p als Büschelparameter fungiert und die Bedeutung von λ, λ' aus einer der Gleichungen (18) zu ersehen ist. Für die ausgearteten Gewinde dieses Büschels gilt

$$p^2\,(\hat{\mu}\, \hat{\mu}) + 2\,p\,(\lambda'\, \hat{\mu}) + (\lambda'\, \lambda') - (\lambda\, \lambda) = 0. \tag{23}$$

Diesen ausgearteten Gewinden entsprechen die Leitgeraden $[\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_i']$ des

[12] Die Steigung (Gewindeparameter) eines solchen Gewindes ist $k = -1$. Vgl. etwa *H. R. Müller*, Monh. f. Math. **56** (1952), 96—100.

gemeinsamen Strahlnetzes. Sind p_1, p_2 die Wurzeln der Gleichung (23), so ist

$$a_i = \frac{\lambda}{\sqrt{(\lambda\,\lambda)}}, \quad a_i' = \frac{\lambda' + p_i\,\hat{\mu}}{\sqrt{(\lambda\,\lambda)}} \; ;$$

die beiden Leitstrahlen sind somit linksparallel. Da eine *Clifford*sche Fläche als Quadrik durch drei parallele Strahlen erklärt werden kann, haben wir den Satz:

Das Strahlnetz von Schönemann besitzt im Fall $\mu = 0$, $\mu' \neq 0$ *linksparallele Leitstrahlen und ist in* ∞^1 *Cliffordsche Quadriken zerlegbar.*

Für $\mu \neq 0$, $\mu' = 0$ sind in obigen Aussagen die Begriffe „links-" und „rechts-parallel" zu vertauschen.

Allgemeine Gesichtspunkte zur Interpolation und einige durch sie angeregte Untersuchungen.

Von

Mauro Picone, Rom.

(Eingelangt am 25. Juni 1952.)

Soll die Funktion $f(x)$ der Variablen x im Intervall (a, b) der reellen x-Achse linear interpoliert werden, so berechnet man statt der Funktion die Lösung u_f der Gleichung

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = 0$$

unter den Bedingungen

$$u(a) = f(a), \; u(b) = f(b).$$

Wird $f(x)$ im besagten Intervall mitsamt seiner zweiten Ableitung als stetig vorausgesetzt, so gelten für den begangenen Fehler $R(x) = f(x) - u_f(x)$ die Gleichungen

$$\frac{d^2 R}{dx^2} = f''(x),$$

$$R(a) = 0, \; R(b) = 0,$$

und daher

$$R(x) = \int_a^b G(x, \xi) f''(\xi) \, d\xi,$$

wo $G(x, \xi)$ die Funktion von *Burkhardt* ist

$$G(x, \xi) \begin{cases} = \dfrac{(b - x)(a - \xi)}{b - a} \text{ für } \xi \leqq x, \\ = \dfrac{(b - \xi)(a - x)}{b - a} \text{ für } \xi \geqq x. \end{cases}$$

---

* Vorliegende Arbeit wurde im Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo in Rom hergestellt. Der Inhalt derselben wurde in gekürzter Form vom Verfasser am 18. April 1952 im Math. Institut der Universität Wien vorgetragen.

Es folgt daraus z. B., daß, wenn man die Berechnung des Integrals über die Funktion $f(x)$, erstreckt über das Intervall (a, b), durch die Berechnung des Integrals über die Interpolationsfunktion $u_f(x)$ ersetzt, d. h. durch den Ausdruck

$$\frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a),$$

man folgenden Fehler begeht:

$$\varrho = \int_a^b R(x)\,dx = \int_a^b f''(\xi)\,d\xi \int_a^b G(x,\xi)\,d\xi = -\tfrac{1}{2}\int_a^b f''(x)\,(b-x)\,(x-a)\,dx.$$

Er verschwindet daher für alle die Funktionen und nur für die, deren zweite Ableitung im Intervall (a, b) orthogonal zur Funktion $(b-x)(x-a)$ ist, d. h. die Funktionen, die der Gleichung genügen:

$$f''(x) = \varphi(x) - \frac{30\,(b-x)\,(x-a)}{(b-a)^5}\int_a^b \varphi(x)\,(b-x)\,(x-a)\,dx$$

wobei $\varphi(x)$ eine völlig willkürliche stetige Funktion ist.

Diese höchst einfachen und elementaren Bemerkungen führen zu den folgenden allgemeinen Gesichtspunkten zur Interpolation, deren beachtliche Konsequenzen ich in vorliegender Arbeit anhand mancher Beispiele zeigen werde, unter Hinweis auch auf einige interessante Untersuchungen, die durch sie nahegelegt werden.

Sei T ein beschränkter Bereich des r-dimensionalen Raumes, dessen Punktkoordinaten ich mit $x_1, x_2, \ldots, x_r$ bezeichnen werde und $\mathcal{F}T$ der Rand des Bereiches. Sei

$$E \equiv \Sigma\, a_{i_1 i_2 \ldots i_r}\,\frac{\partial^{i_1+i_2+\ldots+i_r}}{\partial x_1^{i_1}\,\partial x_2^{i_2}\ldots\partial x_r^{i_r}},$$
$$i_1 + i_2 + \ldots + i_r \leqq 1 + \nu,$$

ein bestimmter linearer Operator mit partiellen Ableitungen, deren Ordnung nicht größer ist als $1+\nu$, und mit Koeffizienten $a_{i_1 i_2 \ldots i_r}(P)$, die reelle oder komplexe Funktionen des Punktes $P(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ sind.

Sei $\{u\}$ eine gegebene lineare Klasse von Funktionen, derart, daß für jede derselben

$$E[u]$$

eine stetige Funktion in T ist. Seien

$$L_1, L_2, \ldots, L_m$$

m gleichfalls vorgegebene Operatoren, die homogen und distributiv

in der Klasse $\{u\}$ definiert seien und für die die folgenden Bedingungen gelten:

a) Wie immer eine Funktion $e(P)$ aus einer wohlbestimmten *linearen* Klasse $\{e(P)\}$ von in T stetigen Funktionen gewählt sei und auch ein Vektor $l(P)$ mit m Komponenten $l_1(P), l_2(P), \ldots, l_m(P)$ aus einer Klasse $\{l(P)\}$, die gleichfalls linear und wohlbestimmt sei, es existiert immer eine und nur eine zur Klasse $\{u\}$ gehörige Funktion, die die folgenden Gleichungen erfüllt:

$$\begin{cases} E[u] = e(P) \\ L_1[u] = l_1(P),\ L_2[u] = l_2(P),\ \ldots,\ L_m[u] = l_m(P). \end{cases} \tag{1}$$

b) Es existiert eine Funktion $G(P, Q)$ der Punkte $P(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ und $Q(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r)$, derart, daß, wenn der Punkt P in T beliebig fest angenommen wird, sie eine in $T - \mathcal{F}T - P$ definierte in T summierbare Funktion des Punktes Q ist und für jede Funktion $e(P)$ der Klasse $\{e(P)\}$ die zur Klasse $\{u\}$ gehörige Lösung der Gleichungen

$$\begin{cases} E[u] = e(P) \\ L_1[u] = 0,\ L_2[u] = 0,\ \ldots,\ L_m[u] = 0, \end{cases} \tag{2}$$

durch die Formel

$$u(P) = \int_T G(P, Q)\, e(Q)\, d\, T(Q)$$

geliefert wird; d. h. es existiert die *Green*sche Funktion bezüglich des Bereiches T und der Operatoren

$$E, L_1, L_2, \ldots, L_m$$

auf den Klassen $\{u\}$ und $\{e\}$.

Dies vorausgeschickt, kann man den Methoden der Interpolationsrechnung die folgende allgemeine Fassung geben*:

Sei $\{f(P)\}$ eine in der Klasse $\{u\}$ enthaltene Klasse von Funktionen, derart, daß für jede dieser Funktionen $E[f]$ zu $\{e(P)\}$ gehört und der Vektor mit den Komponenten $L_k[f]$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ zu $\{l(P)\}$.

Ist nun eine Funktion $f(P)$ der Klasse $\{f(P)\}$ gegeben, so besteht ihre näherungsweise Berechnung im Bereich T, *mit Hilfe der zu den Operatoren E und L_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ gehörigen Interpolation* oder anders ausgedrückt, *mit Hilfe der zu den Gleichungen*

---

* Vgl. meine Arbeit „Vedute generali sull'interpolazione e qualche loro conseguenza", Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Vol. V della Serie III (1951) pp. 193—244. In der Folge werde ich diese Arbeit mit dem Buchstaben (M) zitieren.

$$\begin{cases} E[u] = 0, \\ L_k[u] = L_k[f] \quad (k = 1, 2, \ldots, m) \end{cases} \tag{3}$$

gehörigen Interpolation, in Folgendem:

Man berechnet anstelle von $f(P)$ die Lösung

$$u_f(P)$$

der Gleichungen (3).

Da in T

$$f(P) = u_f(P) + \int_T G(P, Q)\, E[f]\, d\, T(Q), \tag{4}$$

ist, gilt folgender Satz:

I. *Der Fehler, den man bei obengenannter Rechnung begeht, ist durch die Formel*

$$R(P) = \int_T G(P, Q)\, E[f]\, d\, T(Q)$$

gegeben.

Sei jetzt A ein beliebig festgelegter Operator, der homogen und distributiv in der Klasse $\{u\}$ definiert ist und der auf eine Funktion $u(P)$ angewendet stets als Resultat eine Zahl ergibt und dem eine wohlbestimmte in T summierbare Funktion $\Gamma_A(Q)$ entsprechen möge, für die man, wie immer $e(P)$ in der Klasse $\{e(P)\}$ gewählt sei,

$$A\left[\int_T G(P, Q)\, e(Q)\, d\, T(Q)\right] = \int_T \Gamma_A(Q)\, e(Q)\, d\, T$$

hat.

Man folgert aus (4) für jede Funktiou $f(P)$ der Klasse $\{f\}$

$$A[f] = A[u_f] + \int_T \Gamma_A(Q)\, E[f]\, d\, T,$$

und daher gilt der Satz

II. *Der Fehler, den man begeht, indem man die Berechnung von $A[f]$ durch die von $A[u_f]$ ersetzt, ist gegeben durch*

$$\varrho = \int_T \Gamma_A(Q)\, E[f]\, d\, T; \tag{5}$$

er verschwindet daher dann und nur dann, wenn $E[f]$ in T orthogonal zu $\Gamma_A(Q)$ ist, und übertrifft dem Betrage nach niemals die Größe

$$\int_T |\, \Gamma_A(Q)\, |\, d\, T \,.\, \max_T |\, E[f]\, |.$$

Seien: E' ein anderer linearer Operator mit partiellen Ableitungen von der Ordnung $1 + \nu'$ und $\{u\}'$ eine Klasse von Funktionen des Punktes P, derart, daß für jede derselben $E'[u]$ eine stetige Funktion

in T ist, während für die linearen Klassen $\{e(P)\}'$ und $\{l(P)\}'$ von stetigen Funktionen in T bzw. Vektoren mit m' Komponenten, die Bedingungen a) und b) gelten, mit einer *Green*schen Funktion $G'(P, Q)$ bezüglich des Operators E' und der m' homogenen und distributiven, in der Klasse $\{u\}'$ definierten Operatoren $L_1', L_2', \ldots, L'_{m'}$.

Sei $\{f(P)\}'$ eine Klasse von Funktionen, die in der Klasse $\{u\}'$ enthalten sind und gehöre für jede derselben $E'[f]$ zu $\{e(P)\}'$ und der Vektor mit den Komponenten $L'_k[f]$ $(k = 1, 2, \ldots, m')$ zu $\{l(P)\}'$.

Setzen wir voraus, daß der in den Klassen $\{u\}$ und $\{u\}'$ definierte Operator Λ bezüglich der Funktionen der Klasse $\{e(P)\}'$ die gleichen Eigenschaften aufweist wie bezüglich der Funktionen der Klasse $\{e(P)\}$ und daß man

$$\Lambda\left[\int_T G'(P, Q)\, e'(Q)\, d\, T(Q)\right] = \int_T \Gamma'_\Lambda(Q)\, e'(Q)\, d\, T.$$

hat.

Nun kann es vorkommen — und es kommt oft vor in den Anwendungen —, daß die beiden Klassen $\{f\}$ und $\{f\}'$ mehrere Funktionen gemeinsam haben, deren Klasse ich mit $\{f\} \cdot \{f\}'$ bezeichnen will, und daß für jede Funktion dieser Klasse, wobei u_f und u_f' ihre Interpolationsfunktionen seien, die zu den Operatoren E, L_k bzw. E', L_k' gehören, immer

$$\Lambda[u_f] = \Lambda[u_f']$$

ist.

Unter diesen Bedingungen gilt folgender Satz:

III. *Für jede Funktion $f(P)$ der Klasse $\{f\} \cdot \{f\}'$ ist der Fehler, den man begeht, indem man die Berechnung von $\Lambda[f]$ durch die von $\Lambda[u_f]$ ersetzt, außer durch* (5) *auch durch*

$$\varrho = \int_T \Gamma'_\Lambda(Q)\, E'[f]\, d\, T, \qquad (5')$$

gegeben, und daher ist für jede dieser Funktionen die Orthogonalität der Funktionen $\Gamma_\Lambda(Q)$ und $E[f]$ in T äquivalent der Orthogonalität der Funktionen $\Gamma'_\Lambda(Q)$ und $E'[f]$.

Dieser Satz findet sehr nützliche Anwendungen in der Rechenpraxis; denn er gestattet, verschiedene Ausdrücke für den Fehler zu geben, von denen einer manchmal ohne weiteres eine bessere Abschätzung dieses Fehlers liefert als die Abschätzungen, die man unmittelbar aus den andern gewinnen könnte.

§ 1. Peripherische Interpolation.

Peripherisch nenne ich diejenigen Interpolationsverfahren, die sich auf die Kenntnis der Werte der Funktion oder ihrer Ableitungen oder auch gewisser Linearkombinationen zwischen diesen und jenen am Rand $\mathfrak{F}T$ des Bereiches T stützen. Ich betrachte einige Beispiele dafür.

1. Setzen wir

$$\Delta = \sum_{k=1}^{r} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}.$$

Unter der Annahme, daß $\mathfrak{F}T$ gewissen Regularitätseigenschaften genügt, kann man bekanntlich Klassen $\{u\}$, $\{e\}$, $\{l\}$ in der Weise bestimmen, daß die Eigenschaften a) und b) von folgenden Operatoren erfüllt werden:

$$\begin{cases} E \equiv \Delta^\nu \\ L_k \equiv \Delta^k \text{ [auf } \mathfrak{F}T\text{]}, \ (k = 0, 1, \ldots, \nu - 1). \end{cases}$$

In (M) im § 2 wurde der Fall $\nu = 1$ betrachtet, wobei der Bereich T als Hypersphäre oder auch als hypersphärische Schicht vorausgesetzt wurde. Man gelangte hierbei zur näherungsweisen Berechnung des Funktionals

$$\Lambda[f] = \int_T f(P)\, d\, T, \tag{2}$$

vermittels einer Integration von $f(P)$ über $\mathfrak{F}T$, mit einem praktisch brauchbaren Ausdruck für den Fehler. Für $r=2$ $(x_1 = x, x_2 = y)$ ist dort auch der Fall betrachtet worden, daß der Bereich T ein gleichseitiges Dreieck ist, ein Fall, der besonders nützlich ist bei der numerischen Berechnung von Integralen, die über Bereiche der Ebene von beliebiger Form oder Ausdehnung erstreckt werden, da die Ebene immer in gleichseitige Dreiecke von beliebig kleiner Seitenlänge zerlegt werden kann. Es lohnt sich, etwas näher darauf einzugehen.

Auf jeder Seite des gleichseitigen Dreiecks T ist die auf ihr durch die positive Umlaufung des Randes von T vorgeschriebene Richtung gegeben. Wir beziehen die Punkte jeder Seite auf ein System von Abszissen s, das den Mittelpunkt der Seite als Ursprung und die angegebene Richtung besitzt, und bezeichnen mit $f_1(s)$, $f_2(s)$, $f_3(s)$ die Funktionen von s, auf welche die Funktion $f(x, y)$ sich reduziert auf bzw. der ersten, zweiten, dritten Seite. Man gelangt so zu der folgenden Näherungsformel

$$\int_T f(P)\,dT = \frac{\sqrt{3}}{4\,\delta}\int_{-\delta}^{\delta}[f_1(s)+f_2(s)+f_3(s)]\,(\delta^2-s^2)\,ds$$

mit dem Fehler

$$\varrho = \int_T \Gamma(Q)\,\Delta f\,dT,$$

wobei

$$\Gamma(Q) = \frac{y}{4\sqrt{3}\,\delta}\,[3x^2-(y-\sqrt{3}\,\delta)^2]$$

ist und δ die halbe Seitenlänge des Dreiecks bedeutet und die x-Achse auf einer Seite des Dreiecks und die y-Achse auf der Normalen zu dieser Seite durch den gegenüberliegenden Eckpunkt angenommen wird. Man findet, für reelles f,

$$\varrho = -\frac{\delta^4\sqrt{3}}{20}\,[\Delta f]_P,$$

unter P einen Punkt im Innern von T verstanden.

2. Wenn der Rand $\mathscr{F}T$ genügend regulär ist, kennt man auch Klassen $\{u\}$, $\{e\}$, $\{l\}$, für die die Bedingungen a) und b) durch die Operatoren

$$\begin{cases} E = \Delta^\nu \\ L_k = \dfrac{d^k}{dn^k}\ [\text{auf } \mathscr{F}T],\ (k=0,1,\ldots,\nu-1) \end{cases} \tag{3}$$

erfüllt sind, wo n die innere Normale zu $\mathscr{F}T$ bedeutet. Im Falle, wo T eine Hypersphäre oder auch eine hypersphärische Schicht ist, gelangt man durch das betrachtete Interpolationsverfahren zur angenäherten Berechnung des Integrals (2) mittels Integrationsformeln für f und seine Ableitungen $d^k f/dn^k$ auf $\mathscr{F}T$, mit dem Fehler

$$\varrho = \int_T \Gamma(Q)\,\Delta^\nu f\,dT, \tag{4}$$

wo $\Gamma(Q)$ eine für die numerische Rechnung brauchbare Form besitzt. Indessen ist für $\nu \geqq 2$ und $r > 1$ der entsprechende Ausdruck sowie die erwähnten Integrationsformeln auf $\mathscr{F}T$ noch nicht hingeschrieben worden. Es wäre der Mühe wert, dies zu tun.

3. Für $r > 2$, $\nu \geqq 1$ sowie für $r = 2$ und $\nu > 1$, im Fall, daß das betrachtete Interpolationsverfahren zu den Operatoren (1) oder auch (3) gehört, wäre die Durchführung folgender Untersuchung von Interesse: Die Bereiche T des r-dimensionalen Raums zu bestimmen, in die der Raum zerlegbar ist und für die die Funktion $\Gamma(Q)$, die in der Formel (4)

für den bei der Berechnung des Integrals (2) begangenen Fehler auftritt, eine rechnerisch brauchbare Form besitzt.

4. In dem Fall, wo T ein Intervall des r-dimensionalen Raumes ist, werde

$$D = \frac{\partial^r}{\partial x_1 \, \partial x_2 \ldots \partial x_r}$$

gesetzt. Man kann zu praktischen peripherischen Interpolationsformeln gelangen, indem man die Interpolationsverfahren betrachtet, die zu den Operatoren

$$\begin{cases} E = D^{2\nu} \\ L = D^k \text{ [auf } \mathfrak{F} T] \quad (k = 0, 1, \ldots, \nu - 1) \end{cases} \tag{5}$$

gehören.

Um sich einfach ausdrücken zu können, empfiehlt es sich, sich der folgenden Sprechweise zu bedienen: Wir werden sagen, daß eine Funktion φ der reellen Variablen $y_1, y_2, \ldots, y_s$ *von der Klasse* μ ist in einem Intervall des s-dimensionalen Raumes — unter μ eine ganze nichtnegative Zahl verstanden — wenn sie da samt ihren Ableitungen

$$\frac{\partial^{h_1+h_2+\ldots+h_s} \varphi}{\partial y_1^{h_1} \, \partial y_2^{h_2} \ldots \partial y_s^{h_s}} \qquad (h_i = 0, 1, \ldots, \mu;\ i = 1, 2, \ldots, s)$$

stetig ist.

Dies vorausgeschickt kann man beweisen, daß, wenn man die Operatoren (5) betrachtet, die Bedingungen a) und b) im Intervall T des r-dimensionalen Raums erfüllt sind, falls man die Voraussetzung macht, daß die Klasse $\{u\}$ diejenige der Funktionen von der Klasse 2ν in T ist, die Klasse $\{l_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots, \nu)$ diejenige der Funktionen von der Klasse $2\nu - k$ auf $\mathfrak{F} T$ und die Klasse $\{e\}$ die der stetigen Funktionen in T, d. h. also unter Anwendung der eingeführten Sprechweise, der Funktionen, die da von der Klasse Null sind. Doch ist der Beweis hierfür noch nicht in voller Allgemeinheit hingeschrieben worden.

In (M) — vgl. § 6 — und in einer (in Vorbereitung befindlichen) Arbeit von *M. Birindelli* ist unter dieser Voraussetzung der Fall $\nu = 1$ betrachtet worden und wurden für die Berechnung des Integrals (2) die folgenden Näherungsformeln erhalten:

Für $r = 1$, $x_1 = x$, mit $a \leqq x \leqq a'$

$$\int_a^{a'} f(x)\, dx = \frac{a' - a}{2} [f(a) + f(a')] \tag{6_1}$$

(Formel von *Bezout*),;

für $r = 2$, $x_1 = x$, $x_2 = y$, falls T die äußerste untere Ecke in (a, b) und die äußerste obere Ecke in (a', b')* und die Eckpunkte V_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ hat,

$$\int_a^{a'}\int_b^{b'} f(x,y)\,dx\,dy = \frac{a'-a}{2}\int_a^b [f(a,y)+f(a',y)]\,dy$$
$$+\frac{b'-b}{2}\int_a^{a'}[f(x,b)+f(x,b')]\,dx - \frac{\text{area } T}{4}\sum_{i=1}^{4} f(V_i); \qquad (6_2)$$

für $r = 3$, $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, und T mit der äußersten unteren Ecke (a, b, c) und der äußersten oberen Ecke (a', b', c') und den Eckpunkten V_i $(i = 1, 2, \ldots, 8)$

$$\int_a^{a'}\int_b^{b'}\int_c^{c'} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \mathcal{S}\frac{a'-a}{2}\int_b^{b'}\int_c^{c'}[f(a,y,z)+f(a',y,z)]\,dy\,dz$$
$$-\mathcal{S}\frac{\text{vol } T}{4(c'-c)}\int_c^{c'}[f(a,b,z)+f(a,b',z)+f(a',b,z)+f(a',b',z)]\,dz$$
$$+\frac{\text{vol } T}{8}\sum_{i=1}^{8} f(V_i), \qquad (6_3)$$

. . . . . .

Hierbei bedeutet das Symbol $\mathcal{S}$, daß die Summe aus dem rechts von $\mathcal{S}$ geschriebenen Ausdruck und den beiden durch zyklische Vertauschung — gleichzeitig für (x, y, z), (a, b, c) und (a', b', c') — entstehenden Ausdrücken zu bilden ist.

Durch Anwendung dieser Formeln begeht man für jedes r einen Fehler

$$\varrho = (-1)^r \frac{(\text{Maß } T)^3}{16^r}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\cdots\int_{-1}^{1} f^{(2)}(a_1^0 + \alpha_1 t_1, a_2^0 + \alpha_2 t_2, \ldots,)$$
$$\cdot \prod_{i=1}^{r}(1-t_i^2)\,dt_i = (-1)^r \frac{(\text{Maß } T)^3}{12^r}[D^2 f]_P \text{ (falls } f \text{ reell ist)},$$

wo die a_i^0 $(i = 1, 2, \ldots, r)$ die Koordinaten des Mittelpunktes von T, die α_i die halben Kantenlängen von T sind, P einen bestimmten Punkt im Innern von T bedeutet und

$$D^2 f \equiv f^{(2)}(x, y, z)$$

gesetzt wird.

Wenn man zur Berechnung der einfachen Integrale auf der rechten Seite von (6_2) die Formel (6_1) anwendet und zur Berechnung der

---

* D. h. T ist das Intervall $a \leqq x \leqq a'$, $b \leqq y \leqq b'$.

Doppelintegrale auf der rechten Seite von (6_3) die Formel (6_2), findet man beziehungsweise

$$\int_a^{a'}\int_b^{b'} f(x, y)\,dx\,dy = \frac{\text{area } T}{4} \sum_{i=1}^{4} f(V_i), \tag{$6_2'$}$$

$$\int_a^{a'}\int_b^{b'}\int_c^{c'} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = S\,\frac{\text{vol } T}{4\,(c'-c)} \int_c^{c'} [f(a, b, z) + f(a', b, z)$$

$$+ f(a, b', z) + f(a', b', z)]\,dz - \frac{\text{vol } T}{4} \sum_{i=1}^{8} f(V_i), \tag{$6_3'$}$$

und indem man die einfachen Integrale auf der rechten Seite letzterer Formel durch die durch (6_1) gegebenen Näherungswerte ersetzt,

$$\int_a^{a'}\int_b^{b'}\int_c^{c'} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \frac{\text{vol } T}{8} \sum_{i=1}^{8} f(V_i), \tag{$6_3''$}$$

wobei der begangene Fehler ein in jedem Falle leicht hinzuschreibender, praktisch brauchbarer Ausdruck ist.

§ 2. Interpolation im Bereich.

Ich spreche von Interpolationsverfahren *im Bereich*, wenn diese auch Werte im Innern von T der Funktion oder ihrer Ableitungen heranziehen. Ich werde hierfür einige Beispiele geben, wobei ich mich auf den Gebrauch des Operators D^ν beschränken werde, den ich vorhin eingeführt habe, und auf die Betrachtung von Bereichen T, die Intervalle des Raumes sind. Ich brauche zu diesem Zweck eine Bezeichnung. Sei

$$P_0\,(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_r^0)$$

ein Punkt des Intervalles T. Dann bezeichne ich den Ort der Punkte von T, für die man

$$(x_1 - x_1^0)\,(x_2 - x_2^0) \ldots (x_r - x_r^0) = 0$$

hat, als eine *Koordinatenhyperfläche von T mit dem Ursprung P* und schreibe dafür das Symbol (P_0). Offenbar kann man, wenn P' und P'' die äußerste obere und untere Ecke von T bezeichnen, schreiben $\mathfrak{F}\,T = (P') + (P'')$.

5. Sei P_0 ein beliebiger fester Punkt im Intervall T. Man beweist sogleich, daß die Bedingungen a) und b) durch die Operatoren

$$\begin{cases} E = D^{1+\nu} \\ L_k = D^k\ [\text{auf } (P_0)] \end{cases} \qquad (k = 0, 1, \ldots, \nu) \tag{7}$$

erfüllt werden. Hierbei sind die Klassen $\{u\}$, $\{e\}$, $\{l_k\}$ die der Funktionen von der Klasse, beziehungsweise, $1+\nu$ und 0 in T, $1+\nu-k$ auf (P_0).

Setzt man

$$D^{1+\nu} f = f^{(1+\nu)}, \quad D^k f\,[\text{auf } (P_0)] = f_k(x_1, x_2, \ldots, x_r),$$

so findet man als Interpolationsfunktion

$$u_f = f_0(x_1, x_2, \ldots, x_r) + \sum_{k=1}^{\nu} \int_{x_1^0}^{x_1} \int_{x_2^0}^{x_2} \cdots \int_{x_r^0}^{x_r} f_k(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r) \prod_{i=1}^{r} \frac{(x_i - \xi_i)^{k-1}}{(k-1)!}\, d\xi_i, \tag{8}$$

und als Fehler

$$R = f - u_f = \int_{x_1^0}^{x_1} \int_{x_2^0}^{x_2} \cdots \int_{x_r^0}^{x_r} f^{(1+\nu)}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r) \prod_{i=1}^{r} \frac{(x_i - \xi_i)^{\nu}}{\nu!}\, d\xi_i.$$

In der Einleitung von (M) habe ich diese speziellen Interpolationsformeln *Taylorsche Formeln* genannt, und zwar aus dem Grund, weil für $r = 1$ die rechte Seite von (8) gerade das *Taylor*sche Polynom, von der Ordnung und dem Grade ν, von f ist.

Das betrachtete Interpolationsverfahren heißt *zentral*, wenn der Punkt P_0 im Mittelpunkt von T angenommen wird. In diesem Fall leitet man, sei es für $\nu = 0$, sei es für $\nu = 1$, hieraus (vgl. (M), § 6) für die Berechnung des Integrals (2) die folgenden Näherungsformeln her, in denen die Bezeichnungen von Nr. 4 verwendet und $a + a' = 2a_0$, $b + b' = 2b_0$, $c + c' = 2c_0$ gesetzt werden. Für $r = 1$

$$\int_a^{a'} f(x)\, dx = (a' - a)\, f(a_0) \quad \text{(Formel von } \textit{Gauß}); \tag{9$_1$}$$

für $r = 2$

$$\int_a^{a'} \int_b^{b'} f(x, y)\, dx\, dy =$$

$$(b' - b) \int_a^{a'} f(x, b_0)\, dx + (a' - a) \int_b^{b'} f(a_0, y)\, dy - f(a_0, b_0)\, \text{area } T; \tag{9$_2$}$$

für $r = 3$

$$\int_a^{a'} \int_b^{b'} \int_c^{c'} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz =$$

$$S(a' - a) \int_b^{b'} \int_c^{c'} f(a_0, y, z)\, dy\, dz - S \frac{\text{vol } T}{a' - a} \int_a^{a'} f(x, b_0, c_0)\, dx + f(a_0, b_0, c_0)\, \text{vol } T; \tag{9$_3$}$$

. . . . . .

Der hierbei begangene Fehler ist, wie auch der Wert von r sei.

$$\varrho = \frac{(\text{Maß } T)^2}{4^r} \int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 \prod_{i=1}^{r} \Delta_{-t_i}^{1-t_i} f^{(1)}(a_1^0 + \alpha_1 t_1, a_2^0 + \alpha_2 t_2, \ldots)$$

$$\cdot \prod_{i=1}^{r} (1 - t_i)\, dt_i^* = \frac{(\text{Maß } T)^2}{8^r} \left[\prod_{i=1}^{r} \Delta_{x_i}^{3a_i^0 - x_i} D f\right]_P$$

(wenn f reell ist),

der für $\nu = 1$ auch durch (siehe Satz III)

$$\varrho = \frac{(\text{Maß } T)^3}{16^r} \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \cdots \int_{-1}^{1} f^{(2)}(a_1^0 + \alpha_1 t_1, a_2^0 + \alpha_2 t_2, \ldots)$$

$$\cdot \prod_{i=1}^{r} (1 - |t_i|)^2\, dt_i = \frac{(\text{Maß } T)^3}{24^r} [D^2 f]_P$$

(wenn f reell ist)

gegeben ist. P bezeichnet hierbei einen bestimmten Punkt im Innern von T.

Wenn man auf die Berechnung der einfachen Integrale auf der rechten Seite von (9_2) die Formel (9_1) anwendet und auf die Berechnung der Doppelintegrale auf der rechten Seite von (9_3) die Formel (9_2), findet man beziehungsweise

$$\int_a^{a'} \int_b^{b'} f(x, y)\, dx\, dy = f(a_0, b_0) \text{ area } T, \tag{$9_2'$}$$

$$\int_a^{a'} \int_b^{b'} \int_c^{c'} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz =$$

$$S \frac{\text{vol } T}{a' - a} \int_a^{a'} f(x, b_0, c_0)\, dx - 2 f(a_0, b_0, c_0) \text{ vol } T, \tag{$9_3'$}$$

und indem man die einfachen Integrale auf der rechten Seite von letzterer Formel durch die durch (9_1) gegebenen Näherungswerte ersetzt,

$$\int_a^{a'} \int_b^{b'} \int_c^{c'} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = f(a_0, b_0, c_0) \text{ vol } T, \tag{$9_3''$}$$

mit einem Fehler, der in jedem Falle ein leicht hinzuschreibender praktisch brauchbarer Ausdruck ist.

---

* Hierbei wurde gesetzt:

$$\Delta_{a_h}^{b_h} \varphi(\ldots, x_h, \ldots) = \varphi(\ldots, b_h, \ldots) - \varphi(\ldots, a_h, \ldots).$$

Natürlich kann man auch für die angenäherte Berechnung der einfachen Integrale auf der rechten Seite von (6_2) oder der Doppelintegrale auf der rechten Seite von (6_3) die Formeln (9_1) oder (9_2) verwenden, und, desgleichen, für die Berechnung der einfachen Integrale auf der rechten Seite von (9_2) oder der Doppelintegrale auf der rechten Seite von (9_3) die Formeln (6_1) oder (6_2) verwenden usw. — und man wird dabei einen Fehler begehen, für den man jeweils leicht einen praktisch brauchbaren Ausdruck angeben kann.

6. Seien ν_0 und ν feste (ganze,, nichtnegative) Zahlen. Ich spreche dann von **zentro-peripherischen Interpolationsverfahren** im Intervall T (vgl. die §§ 3 und 6 von (M), die zu den Operatoren

$$\begin{cases} E & = D^{\nu_0+2\nu+3} \\ L_{0k} & = D^k\,[\text{auf } (P_0)] \qquad (k = 0, 1, \ldots, \nu_0), \\ L_k & = D^k\,[\text{auf } \mathcal{F}\,T] \qquad (k = 0, 1, \ldots, \nu), \end{cases} \tag{10}$$

gehören, wobei P_0 der Mittelpunkt von T ist. In (M) habe ich diese Verfahren im Falle $r = 1$ betrachtet für beliebige Werte von ν_0 und ν und im Falle $r = 2$ für $\nu = 0$. *M. Birindelli*, seinerseits, in der bereits zitierten, in Vorbereitung befindlichen Arbeit, hat sie für beliebige Werte von r und immer für $\nu = 0$ betrachtet. Für die Berechnung des Integrals (2) hat man so sowohl für $\nu_0 = 0$ als für $\nu_0 = 1$ folgende Näherungsformeln erhalten, in denen die Bezeichnungen von Nr. 5 verwendet werden. Für $r = 1$,

$$\int_a^{a'} f(x)\,dx = \frac{a'-a}{6}\,[f(a) + 4f(a_0) + f(a')]\,(\text{Formel von } \textit{Cavalieri-Simpson}); \tag{11_1}$$

für $r = 2$, wobei mit V_i die Eckpunkte, mit P_i' die Seitenmittelpunkte, mit P_0 der Mittelpunkt des Rechtecks T bezeichnet werden,

$$\begin{aligned} \int_a^{a'}\int_b^{b'} f(x, y)\,dx\,dy = {} & \frac{a'-a}{6}\int_b^{b'} [f(a, y) + 4f(a_0, y) + f(a', y)]\,dy \\ & + \frac{b'-b}{6}\int_a^{a'} [f(x, b) + 4f(x, b_0) + f(x, b')]\,dx \\ & - \frac{\text{area } T}{36}\,[\Sigma f(V_i) + 4\,\Sigma f(P_i') + 16 f(P_0)]; \end{aligned} \tag{11_2}$$

für $r = 3$, unter $V_i\,(\bar{z})$ die Ecken, unter $P_i'\,(\bar{z})$ die Seitenmittelpunkte und unter $P_0\,(\bar{z})$ den Mittelpunkt des Rechtecks verstanden, in welchem das Parallelepiped T die Ebene $z = \bar{z}$ schneidet, während V_i die Ecken,

P_i' die Kantenmittelpunkte, P_i'' die Seitenflächenmittelpunkte und P_0 der Mittelpunkt von T sind,

$$\int_a^{a'}\int_b^{b'}\int_c^{c'} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \mathcal{S}\,\frac{a'-a}{6}\int_b^{b'}\int_c^{c'}[f(a,y,z)+4f(a_0,y,z)+f(a',y,z)]\,dy\,dz$$

$$-\mathcal{S}\,\frac{\text{vol } T}{36\,(c'-c)}\int_c^{c'}\{\Sigma f[V_i(z)]+4\,\Sigma f[P_i'(z)]+16\,f[P_0(z)]\}\,dz$$

$$+\frac{\text{vol } T}{216}[\Sigma f(V_i)+4\,\Sigma f(P_i')+16\,\Sigma f(P_i'')+64\,f(P_0)]. \qquad (11_3)$$

. . . . . .

Für jedes r unter der Voraussetzung, daß $f(P)$ von der Klasse ν_0+3 ($\nu_0 \leqq 1$) ist, begeht man bei Anwendung dieser Näherungsformeln den Fehler

$$\varrho = (-1)^r \frac{(\text{Maß } T)^4}{(2^5\,.\,3)^r}\int_0^1 \cdots \int_0^1 \prod_{i=1}^{r}\int_{-t_i}^{t_i} \Delta f^{(3)}(a_1^0+\alpha_1 t_1, a_2^0+\alpha_2 t_2, \ldots)$$

$$.\prod_{i=1}^{r}(1-t_i)^2 t_i\,.\,dt_i = (-1)^r \frac{(\text{Maß } T)^4}{1152^r}\Big[\prod_{i=1}^{r}{}^{2a^0_i-x_i}_{x_i}\Delta\; D^3 f\Big]_P$$

(wenn f reell ist), der für $\nu_0 = 1$ auch gegeben ist (vgl. Satz III) durch

$$\varrho = (-1)^r \frac{(\text{Maß } T)^5}{(2^8\,.\,3^2)^r}\int_{-1}^1 \cdots \int_{-1}^1 f^{(4)}(a_1^0+\alpha_1 t_1,\ a_2^0+\alpha_2 t_2, \ldots)$$

$$.\prod_{i=1}^{r}(1-|t_i|)^3(1+3|t_i|)\,dt_i = (-1)^r \frac{(\text{Maß } T)^5}{2880^r}\,[D^4 f]_P$$

(wenn f reell ist). Hierbei bezeichnet P einen bestimmten Punkt im Innern von T.

Wenn man auf die Berechnung der einfachen Integrale auf der rechten Seite von (11_2) die Formel (11_1) anwendet und die Formel (11_2) auf die Berechnung der Doppelintegrale auf der rechten Seite von (11_3), so findet man beziehungsweise

$$\int_a^{a'}\int_b^{b'} f(x,y)\,dx\,dy = \frac{\text{area } T}{36}\,[\Sigma f(V_i)+4\,\Sigma f(P_i')+16\,f(P_0)], \qquad (11_2')$$

$$\int_a^{a'}\int_b^{b'}\int_c^{c'} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz =$$

$$S \frac{\text{vol } T}{36\,(c'-c)} \int_c^{c'} \{\Sigma f[V_i(z)] + \; + 4\,\Sigma f[P_i'(z)] + 16 f[P_0(z)]\}\, dz -$$

$$2\,\frac{\text{vol } T}{216}\,[\Sigma f(V_i) + 4\,\Sigma f(P_i') + 16\,\Sigma f(P_i'') + 64 f(P_0)], \qquad (11_3')$$

. . . . . .

und indem man die einfachen Integrale auf der rechten Seite letzterer Formel durch die durch (11_1) gegebenen angenäherten Werte ersetzt,

$$\int_a^{a'}\int_b^{b'}\int_c^{c'} f\,dx\,dy\,dz =$$

$$\frac{\text{vol } T}{216}\,[\Sigma f(V_i) + 4\,\Sigma f(P_i') + 16\,\Sigma f(P_i'') + 64 f(P_0)]. \qquad (11_3'')$$

In jedem Falle ist es möglich, für den Fehler einen praktisch brauchbaren Ausdruck anzugeben.

Die Formeln (11_r) dürften, wie ich glaube, dazu bestimmt sein, für die mehrfache numerische Integration auf Intervallen die Rolle zu spielen, die für die einfache Integration seit Jahrhunderten die providentielle Formel von *Cavalieri-Simpson* spielt, der hiermit die langerwartete wirkliche Verallgemeinerung gegeben wird.

Man hat z. B.

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \log(1+x+y+z)\,dx\,dy\,dz = 0,8951293\ldots,$$

und die Formel (11_3) gibt uns den Näherungswert

$$0,8951296\ldots,$$

die Formeln $(11_3')$ und $(11_3'')$ beziehungsweise die Werte

$$0,895136\ldots,$$

$$0,894900\ldots.$$

Fügen wir hinzu, daß, wenn man das Intervall T des r-dimensionalen Raumes in n^r gleiche Intervalle zerlegt und die Formel (11_r) auf die Berechnung des Integrals von f erstreckt über jedes dieser Teilintervalle anwendet und schließlich die Summe der so erhaltenen n^r Resultate bildet, diese Summe uns das Integral von f erstreckt über das ganze Intervall T liefert, mit einem Fehler kleiner als

$$\frac{(\text{Maß } T)^5}{2880^r \cdot n^{4r}}\,\max_T |D^4 f|,$$

wobei die Funktion f in T von der Klasse 4 vorausgesetzt wird.

7. Und jetzt einige Fragen, die sich ganz spontan ergeben:

Kann man alle klassischen Interpolationsverfahren, die zum Operator D und seinen Potenzen gehören und für Funktionen einer reellen Variablen gültig sind, auf Funktionen einer beliebigen Anzahl reeller Variablen verallgemeinern?

Kann man auf die mehrfache numerische Integration die allgemeinen Formeln von *Cotes* verallgemeinern, die für die einfache Integration gelten?

Kann man insbesondere auf die mehrfache Integration die Formeln von *Gauß* erweitern, von denen wir in Nr. 5 nur die erste betrachtet haben?

Ich denke, daß man auf diese Fragen in bejahendem Sinne wird antworten dürfen; denn ich glaube an folgendes allgemeine Theorem, das für die Funktionen einer Variablen ganz elementar ist, aber für Funktionen von mehreren Variablen einen Beweis verlangt.

Im Intervall T des r-dimensionalen Raumes sind m Punkte

$$P_h\,(x_1^{(h)}, x_2^{(h)}, \ldots, x_r^{(h)})\ (h = 1, 2, \ldots, m)$$

beliebig, aber derart gegeben, daß

$$(x_1^{(h)} - x_1^{(k)})\,(x_2^{(h)} - x_2^{(k)}) \ldots (x_r^{(h)} - x_r^{(k)}) \neq 0$$
$$(h \neq k;\ h, k = 1, 2, \ldots, m).$$

Seien $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m$ m nichtnegative ganze Zahlen, die in beliebiger Weise fest angenommen werden, und setzen wir

$$\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_m + m = n.$$

Seien zwei beliebige Funktionen $e\,(P)$ und $\varphi\,(P)$ gegeben, beziehungsweise von der Klasse 0 und n in T, dann existiert immer eine und nur eine Funktion u von der Klasse n, die die Gleichungen erfüllt

$$D^n u = e$$
$$D^k u\,[\text{auf}\,(P_h)] = D^k \varphi\,[\text{auf}\,(P_h)]$$
$$(h = 1, 2, \ldots, m;\ k = 0, 1, \ldots, \nu_h).$$

§ 3. Anwendungen auf die Integration der holomorphen Funktionen von komplexen Variablen.

Die betrachteten Interpolationsverfahren können auf die Approximation der holomorphen Funktionen komplexer Variablen ausgedehnt werden, was zu neuartigen Ausdrücken für den Fehler bei den klassischen Approximationen führt. Ich beschränke mich darauf, — in Kürze — die Funktionen einer komplexen Variablen $z = x + i\,y$ zu betrachten, die in

einem zusammenhängenden Gebiet C (*offene* Punktmenge der Ebene (x, y)) holomorph sind, und die Approximation derselben mittels Linearkombinationen vorgeschriebener Funktionen, die ihrerseits in C holomorph sind.

8. Sei $\vartheta(z)$ eine holomorphe und immer von Null verschiedene Funktion im Holomorphiegebiet C der gegebenen Funktion $f(z)$. Wählt man willkürlich die r Punkte $z_1, z_2, \ldots, z_r$ von C und die r ganzen nicht negativen Zahlen $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r$ und setzt man

$$\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_r + r = n,$$

so gehört die Interpolation von $f(z)$ mittels Funktionen vom Typ

$$\frac{P(z)}{\vartheta(z)}$$

mit den Fundamentalpunkten $z_1, z_2, \ldots, z_r$ und Berührungen in diesen Punkten von den beziehungsweisen Ordnungen $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r$, wo $P(z)$ ein Polynom in z bedeutet, dessen Grad den Wert $n-1$ nicht übertrifft, zu den Gleichungen

$$E[u] \equiv \frac{d^n}{dz^n}(\vartheta u) = 0,$$

$$L_{hk}[u] \equiv u^{(k)}(z_h) = f_{hk} \qquad (h = 1, 2, \ldots, r;\ k = 0, 1, \ldots, \nu_h),$$

wobei f_{hk} den Wert $f^{(k)}(z_h)$ bedeutet. Bezeichnet man mit $P_{hk}(z)$ das wohlbestimmte Polynom, dessen Grad den Wert $n-1$ nicht übertrifft, und welches die n Gleichungen

$$\left[\frac{d^j}{dz^j}\frac{P_{hk}(z)}{\vartheta(z)}\right]_{z=z_i} \begin{cases} = 0 \text{ für } |h-i| + |k-j| > 0 \\ = 1 \text{ für } h = i, \quad k = j, \end{cases}$$

erfüllt, so findet man die Interpolationsfunktion $u_f(z)$

$$u_f(z) = \sum_{h=1}^{r} \sum_{k=0}^{\nu_h} f_{hk} \frac{P_{hk}(z)}{\vartheta(z)},$$

und als Fehler (siehe (M), § 4, für den Fall $\vartheta \equiv 1$).

$$R(z) \equiv f(z) - u_f(z) = \sum_{h=1}^{r}(\gamma_h) \int_{z_h}^{z} G_h(z, \zeta) \frac{d^n}{d\zeta^n}[\vartheta(\zeta) f(\zeta)]\, d\zeta, \tag{12}$$

wo

$$G_h(z, \zeta) = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{k=0}^{\nu_h} \frac{P_{hk}(z)}{\vartheta(z)} \left[\frac{d^k}{dz^k}\frac{(z-\zeta)^{n-1}}{\vartheta(z)}\right]_{z=z_h}$$

ist und das Symbol

$$(\gamma_h) \int_{z_h}^{z} (\ldots)\, d\zeta,$$

das Resultat der Integration längs einer regulären Kurve γ_h bedeutet, die in C verlaufend den Punkt z_h mit dem Punkt z verbindet. Seien

$$a_1, a_2, \ldots, a_p$$

p-Punkte, die nicht zum Gebiet C gehören, und sei m eine ganze nichtnegative Zahl. Dann kann man speziell

$$\vartheta(z) = (z - a_1)^m (z - a_2)^m \ldots (z - a_p)^m \tag{13}$$

annehmen und, $m + n + p = \sigma$ gesetzt, die Teilmengen von C zu bestimmen suchen, wo

$$\lim_{\sigma \to \infty} R(z) = 0,$$

d. h. wo die Approximation der Funktion $f(z)$ mit Hilfe von rationalen Funktionen von z in der Weise möglich ist, daß der Fehler beliebig heruntergedrückt werden kann.

Man könnte insbesondere die r-Fundamentalpunkte $z_1, z_2, \ldots, z_r$ festhalten und $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r$ einen gemeinsamen Wert ν erteilen (man hätte dann $\sigma = m + p + (\nu + 1)\, r$). Man käme so zu einer Problemstellung, zu der bereits im Jahre 1883 *Peano* (vgl. „Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino" (1883)) seine wohlbekannten Resultate lieferte, im Spezialfall $m = 0$, d. h. für die Approximation mittels Polynomen und unter Verwendung eines Ausdrucks für den Fehler, der ganz verschieden von (12) ist.

Man hat, unter $Q_{hk}(z)$ ein Polynom in z und unter c_{hk}^{i}, c_{hk}^{ij} Konstanten verstanden,

$$\frac{P_{hk}(z)}{(z - a_1)^m \ldots (z - a_p)^m} = Q_{hk}(z) + \sum_{i=1}^{p} \frac{c_{hk}^{i}}{z - a_i} + \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=2}^{m} \frac{c_{hk}^{ij}}{(z - a_i)^j}.$$

Daher gelangt man für jede reguläre einfache und geschlossene Kurve γ von C, die z. B. nur den Punkt a_1 umläuft, zu der Näherungsformel

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z)\, dz = \sum_{h=1}^{r} \sum_{k=0}^{\nu_h} f_{hk}\, c_{hk}^{1},$$

mit einem Fehler

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} R(z)\, dz,$$

dem man mit Hilfe von (12) eine praktisch brauchbare Form geben kann.

9. Man kommt zu einem eleganten Ausdruck für den Fehler auch in einem anderen Interpolationsverfahren mittels Polynomen, das ich an letzter Stelle betrachten will für eine holomorphe Funktion in einem als einfach zusammenhängend vorausgesetzten Gebiet C der Ebene z.

Legen wir in beliebiger Weise zwei Punkte a und b des Gebiets C fest und nehmen wir die Polynome von *Legendre*

$$P_k(z) = \frac{d^k}{dz^k} \frac{(z-a)^k (z-b)^k}{k!\,(b-a)^k}, \qquad (k = 0, 1, \ldots,),$$

für die gilt

$$P_0(z) \equiv 1,$$

$$P_k(a) = (-1)^k, \; P_k(b) = 1 \qquad (k > 0),$$

$$(\gamma) \quad \int_a^b P_h(z)\, P_k(z)\, dz \begin{cases} = 0 & h \neq k, \\ = \dfrac{b-a}{2k+1} & h = k, \end{cases}$$

wie immer, die die Punkte a und b verbindende Integrationskurve γ gewählt sei, die in der Folge nicht angedeutet wird. Das Interpolationsverfahren, von dem ich sprechen will, gehört zu den folgenden Gleichungen

$$\begin{cases} \dfrac{d^{n+1} u}{d z^{n+1}} = 0 \\ \displaystyle\int_a^b P_k(z)\, u(z)\, dz = \int_a^b P_k(z)\, f(z)\, dz, \quad (k = 0, 1, \ldots, n). \end{cases} \tag{14}$$

Man findet als Interpolationsfunktion das Polynom

$$u_f(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{2k+1}{b-a} P_k(z) \int_a^b P_k(\zeta)\, f(\zeta)\, d\zeta,$$

d. h.

$$u_f(z) = \int_a^b Q_n(z, \zeta)\, f(\zeta)\, d\zeta,$$

wo

$$Q_n(z, \zeta) = \sum_{k=0}^{n} \frac{2k+1}{b-a} P_k(z)\, P_k(\zeta) = \frac{n+1}{2} \frac{P_{n+1}(z)\, P_n(\zeta) - P_n(z)\, P_{n+1}(\zeta)}{z-\zeta}.$$

Der Fehler $R_n(z) = f(z) - u_f(z)$ wird durch die Lösung der Gleichungen

$$\frac{d^{n+1} u}{dz^{n+1}} = f^{(n+1)}(z), \tag{15}$$

$$\int_a^b P_h(z)\, u(z)\, dz = 0 \qquad (h = 0, 1, \ldots, n) \tag{16}$$

gegeben.

Sei ein Punkt z_0 von C in irgendeiner Weise festgelegt. Man erhält dann alle Lösungen von (15), indem man

$$u(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k P_k(z) + \int_{z_0}^{z} \frac{(z-\zeta)^n}{n!} f^{(n+1)}(\zeta)\, d\zeta$$

setzt, wobei die c_k beliebige Konstanten bezeichnen, für die die Gleichungen (16) die Werte

$$c_k = -\frac{2k+1}{b-a} \int_a^b P_k(\zeta)\, d\zeta \int_{z_0}^{\zeta} \frac{(\zeta-\zeta')^n}{n!} f^{(n+1)}(\zeta')\, d\zeta'$$

geben. Man hat also als Fehler

$$R_n(z) = -\sum_{k=0}^{n} \frac{2k+1}{b-a} P_k(z) \int_a^b P_k(\zeta)\, d\zeta \int_{z_0}^{\zeta} \frac{(\zeta-\zeta')^n}{n!} f^{(n+1)}(\zeta')\, d\zeta' + \int_{z_0}^{z} \frac{(z-\zeta)^n}{n!} f^{(n+1)}(\zeta)\, d\zeta.$$

Indem man ihn im Punkt z_0 betrachtet und beachtet, daß dies ein willkürlicher Punkt ist, hat man auch:

$$R_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{2k+1}{b-a} P_k(z) \int_a^b P_k(\zeta)\, d\zeta \int_{\zeta}^{z} \frac{(\zeta-\zeta')^n}{n!} f^{(n+1)}(\zeta')\, d\zeta' =$$

$$\int_a^z G_a(z,\zeta) f^{(n+1)}(\zeta)\, d\zeta + \int_z^b G_b(z,\zeta) f^{(n+1)}(\zeta)\, d\zeta, \tag{17}$$

wo

$$G_c(z,\zeta) = \int_c^{\zeta} Q_n(z,\zeta') \frac{(\zeta'-\zeta)^n}{n!}\, d\zeta \tag{18}$$

und $Q_n(z,\zeta)$ oben definiert worden ist.

Natürlich kann man den Ausdruck (17) für den Fehler benutzen, um Kriterien für die Entwickelbarkeit der Funktion in eine Reihe nach Legendreschen Polynomen herzuleiten. Diesbezüglich ist der Satz von *K. Neumann*[3] bekannt, wonach die Gleichung

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{b-a} P_k(z) \int_a^b f(\zeta)\, P_k(\zeta)\, d\zeta \tag{19}$$

im Gebiet E gilt, welches die größte offene Ellipse ist, die a und b als

[3] *K. Neumann.* **Über die Entwicklung einer Funktion nach den Kugelfunktionen** (Halle, 1862).

Brennpunkte hat und im Holomorphiegebiet C von $f(z)$ enthalten ist. Die Konvergenz der Reihe ist gleichmäßig auf jeder abgeschlossenen und beschränkten in E enthaltenen Menge. Man hat also in E, mit dieser Konvergenz,

$$\lim_{n\to\infty} R_n(z) = 0. \tag{20}$$

Es kann nun vorkommen, daß diese Gleichung auch außerhalb des — als beschränkt vorausgesetzten — Gebietes E richtig ist und daß deshalb (18) auch außerhalb E gilt. Unter Benutzung passender Abschätzungen für $|R_n(z)|$ ist es in der Tat, wie ich an einem Beispiel zeigen will, möglich, Bereiche zu konstruieren, die in C, aber möglicherweise nicht in E enthalten sind und in denen (19) und daher (18) gleichmäßig gilt.

Sei Γ eine reguläre, einfache und offene Kurve, von der Länge $l(\Gamma)$ mit den Endpunkten a und b, die im Gebiet C, aber nicht in E enthalten ist und die mit der Strecke $S(a, b)$, die die Punkte a und b verbindet, keinen Punkt außer a und b gemeinsam hat. Mit D bezeichnen wir den beschränkten Bereich, der durch $\Gamma + S$ begrenzt ist. Da C als einfach zusammenhängend vorausgesetzt wurde, ist der Bereich D in C enthalten. Wir setzen

$$c = \tfrac{1}{2}(a+b),\quad d = \tfrac{1}{2}|b-a|$$

und für jeden Punkt z der Ebene

$$r(z) = \frac{1}{a}|z-c|.$$

Es gelten die folgenden Abschätzungen

$$\left.\begin{aligned} &|P_n(z)| \leqq q_n [r(z)+1]^n, \\ &|Q_n(z,\zeta)| \leqq \frac{q_n^2}{2d}(n+1)^2 [r(z)+1]^n [r(\zeta)+1]^n \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

$$\text{wo } q_0 = 1,\ q_n = \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 3.1}{n!},\ \text{für } n \geqq 1.$$

Wir halten den Punkt z auf Γ fest und nehmen als Integrationswege zur Berechnung von $G_a(z,\zeta)$, $G_b(z,\zeta)$ und $R_n(z)$ die Bögen von Γ, die durch die Integrationsgrenzen bestimmt werden. Mit s oder mit σ bezeichnen wir die vom Punkt a aus gemessene Bogenlänge von Γ, mit $s(z)$ den Wert von s im Punkt z von Γ, und es sei $z = \gamma(s)$ die Gleichung von Γ in Parameterform. Es folgt dann aus (18) und (21),

$$|G_a(z,\zeta)| \leqq \frac{(n+1)^2}{2d}\, q_n^2\,[r(z)+1]^n \int_0^{s(z)} [r(\gamma)+1]^n \frac{[s(z)-\sigma]^{\cdot}}{n!}\, d\sigma,$$

und daher, wenn mit $\varrho(\Gamma)$ das Maximum von $r(z)$ auf Γ bezeichnet wird,

$$|G_a(z,\zeta)| \leqq \frac{n+1}{2d\,.\,n!}\, q_n^2\,[\varrho(\Gamma)+1]^{2n}\,[s(z)]^{n+1},$$

Man hat auch

$$|G_b(z,\zeta)| \leqq \frac{n+1}{2d\,.\,n!}\, q_n^2\,[\varrho(\Gamma)+1]^{2n}\,[l(\Gamma)-s(z)]^{n+1}.$$

Daraus folgt gemäß (17)

$$|R_n(z)| \leqq \frac{n+1}{d\,.\,n!}\, q_n^2\,[\varrho(\Gamma)+1]^{2n} \int_0^{l(\Gamma)} |f^{(n+1)}[\gamma(s)]|\, s^{n+1}\, ds.$$

Da wir bereits wissen, daß $R_n(z)$ auf der Strecke $S(a,b)$ für $n \to \infty$ gleichmäßig gegen Null strebt, können wir also folgende Aussage machen:

Es gilt (19) *in D, wobei die Konvergenz eine in diesem Bereich gleichmäßige ist, wenn*

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{n+1}{n!}\, q_n^2\,[\varrho(\Gamma)+1]^{2n} \int_0^{l(\Gamma)} |f^{(n+1)}[\gamma(s)]|\, s^{n+1}\, ds \right\} = 0$$

ist, und daher, unter $M_{n+1}(\Gamma)$ *das Maximum des absoluten Betrages von* $f^{(n+1)}(z)$ *auf* Γ *verstanden und wegen* $q_n < 2^n$, *wenn*

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{[4\,[\varrho(\Gamma)+1]^2\, l(\Gamma)]^n}{n!}\, M_{n+1}(\Gamma) \right\} = 0$$

ist.

Wenn diese letzte Gleichung erfüllt ist, so wird der Konvergenzkreis, der zu jeder Taylorschen Reihe von $f(z)$ mit einem Punkt von Γ als Anfangspunkt gehört, den Bereich D in seinem Innern enthalten, aber das berechtigt nicht zu behaupten, daß Bedingungen der Art, wie wir sie betrachtet haben, nicht eintreten können.

Über ein Problem vom Waring-Goldbach'schen Typ.

Von

K. Prachar, Wien.

(Eingelangt am 11. Juli 1952.)

Es soll in dieser Arbeit folgendes bewiesen werden:

Satz: Fast alle positiven geraden Zahlen n sind in der Form darstellbar

$$n = p_1^2 + p_2^3 + p_3^4 + p_4^5 \tag{1}$$

wo p_1, p_2, p_3, p_4 Primzahlen sind.

Der Beweis erfolgt mittels der Methoden von *Hardy-Littlewood* und *Vinogradoff*. Die für die singuläre Reihe angewandte Methode verdankt man *Davenport* und *Heilbronn* (1). *Hua* (2) hat bewiesen, daß man fast alle Zahlen (die gewissen in der Natur der Sache liegenden Kongruenzbedingungen genügen) als Summe von zwei Primzahlquadraten und einer k-ten Potenz ($k \geqq 2$) einer Primzahl darstellen kann. *Roth* (3) hat gezeigt, daß fast alle natürlichen Zahlen u in der Form $u = x^2 + y^3 + z^4$ darstellbar sind, wo x, y, z natürliche Zahlen sind. Ein von ihm bewiesener Hilfssatz (Lemma 3 der vorliegenden Arbeit) bildet einen wesentlichen Teil des folgenden Beweises.

1.

Sei N eine große Zahl und $L = \log N$. Mit den Buchstaben c und C werden positive Konstanten bezeichnet, die nicht immer denselben Wert haben müssen, p bezeichnet immer Primzahlen. Die Konstanten im Symbol 0 () hängen höchstens von ε ab.

Wir teilen das Intervall $0 \leqq \alpha \leqq 1$ in der üblichen Weise in Farey-Bögen ein, welche zu den Farey-Brüchen mit

$$q \leqq NL^{-h_0}, \quad a \leqq q, \ (a, q) = 1$$

gehören, wo $h_0 > 0$ eine feste ganze Zahl ist, die später noch genauer bestimmt wird. Diese Bögen werden eingeteilt in die „major arcs" $\mathfrak{M}$ mit $q \leqq L^{h_0}$ und die „minor arcs" $\mathfrak{m}$ mit $L^{h_0} < q \leqq NL^{-h_0}$.

In beiden Fällen hat ein Bogen die Form

$$\alpha = \frac{a}{q} + \beta, \quad -\vartheta_1 q^{-1} N^{-1} L^{h_0} \leqq \beta \leqq \vartheta_2 q^{-1} N^{-1} L^{h_0}$$

mit $\frac{1}{2} \leqq \vartheta_1, \vartheta_2 \leqq 1$. Wir benützen folgende Bezeichnungen: k bedeutet eine der Zahlen 2, 3, 4, 5.

$$e(\eta) = e^{2\pi i \eta}, \quad e_q(\eta) = e(\eta/q)$$

$$V_k(\alpha) = \sum_{p^k \leqq N} e(\alpha p^k), \quad S_{a,q}^{(k)} = \sum_{\substack{l=1 \\ (l,q)=1}} e_q(a l^k)$$

$$V^*_k(\alpha, a, q) = \{\varphi(q)\}^{-1} S_{a,q}^{(k)} \sum_{2 \leqq n \leqq N} n^{1/k-1} (\log n)^{-1} e(n\beta)$$

Wo über den Buchstaben a summiert wird, soll a immer die Werte $1 \leqq a \leqq q$, $(a, q) = 1$ durchlaufen. Weiter sei

$$V_2^*(\alpha, a, q)\, V_3^*(\alpha, a, q)\, V_4^*(\alpha, a, q)\, V_5^*(\alpha, a, q) = V_2^* \ldots V_5^*(\alpha, a, q)$$

gesetzt. Analoge Bedeutung sollen die Abkürzungen

$$V_2 \ldots V_5(\alpha), \quad V^*_2 \ldots V^*_5(\alpha), \quad S_{a,q}^{(2)} \ldots S_{a,q}^{(5)}$$

haben. Es sei noch

$$\mu = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}, \quad \bar{\mu} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4},$$

$$F_k(\alpha) = \sum_{x^k \leqq N} e(\alpha x^k),$$

x durchläuft alle natürlichen Zahlen.

2.

Lemma 1 (*Siegel-Walfisz*): Wenn $q \leqq L^{h_0}$, $(l, q) = 1$, $n \leqq N$, so gilt

$$\pi(n, q, l) = \{\varphi(q)\}^{-1} li\, n + O(N e^{-c\sqrt{L}})$$

Lemma 2: (*Vinogradoff*). Für ein gegebenes $h > 0$ gibt es immer eine Zahl $h_0 > 0$, so daß auf $\mathfrak{m}$

$$V_k(\alpha) = O(N^{1/k} L^{-h})$$

Lemma 3: (*Roth* (3) Lemma 16)

$$\int_0^1 |F_2(\alpha) F_3(\alpha) F_4(\alpha)|^2 \, d\alpha = O(N^{2\bar{\mu}-1})$$

Lemma 4: Sei $p^r \mid k$, $p^{r+1} \nmid k$ und

$$\gamma = r + 2 \text{ für } p = 2$$
$$= r + 1 \text{ für } p \neq 2$$

Dann ist für $t > \gamma$: $S_{a,p^t}^k = 0$. Beweis siehe z. B. *Hua* (2).

Lemma 5: Sei $k \geqq 2$. Dann gilt

$$S_{a,q}^{(k)} = O\,(q^{1/k+\varepsilon})$$

Beweis siehe (2).

Lemma 6: Auf $\mathfrak{M}$

$$V_k(\alpha) - V_k^*(a, a, q) = O\,(N^{1/k}\, e^{-c\sqrt{L}})$$

Beweis siehe (2). Satz und Beweis gelten wenn $q < L^t$, $\alpha = a/q + \beta$, $|\beta| > N^{-1} L^s$, wo t und s beliebig > 0.

Lemma 7: Für $|\beta| \leqq 1/2$ gilt

$$V_k^*(\alpha) = 0\,(q^{-1/2+\varepsilon} \min(N^{1/k} L^{-1}, |\beta|^{-1/k})$$

Beweis siehe (2).

3.

Sei $\Sigma M_{a,q}$ die Menge der Bögen mit $q \leqq L^t$, $|\beta| < N^{-1} L^s$, $E = (0, 1) - \Sigma M_{a,q}$; t, s, h und $h_0 = h_0(h) > 0$ werden später bestimmt.

Lemma 8:

$$\int_E |V_2 \dots V_5(\alpha)|^2\, d\alpha = O\,(N^{2\mu-1} L^{-2\sigma}),$$

$$\sigma = \min\left(h, \frac{t}{2} + 1, \frac{s}{5}\right).$$

Beweis: Auf $\mathfrak{m}$ ist nach Lemma 2

$$V_5(\alpha) = O\,(N^{1/5} L^{-h}).$$

Wenn $q \geqq L^t$, so ist nach Lemma 6 und 7

$$V_5(\alpha) = 0\,(N^{1/5} e^{-c\sqrt{L}}) + 0\,(q^{-1/2+\varepsilon} N^{1/5} L^{-1}) = 0\,(N^{1/5} L^{-(t/2+1+\varepsilon)}).$$

Wenn $|\beta| \geqq N^{-1} L^s$ so ist nach Lemma 6 und 7

$$V_5(\alpha) = 0\,(N^{1/5} e^{-c\sqrt{L}} + q^{-1/2+\varepsilon} |\beta|^{-1/5}) = 0\,(N^{1/5} L^{-s/5}).$$

Also auf E immer

$$V_5(\alpha) = 0\,(N^{1/5} L^{-\sigma}),$$

daher nach Lemma 3

$$\int_E |V_2 \dots V_5(\alpha)|^2\, d\alpha = 0\,((N^{1/5} L^{-\sigma})^2 \int_0^1 |V_2 \dots V_4(\alpha)|^2\, d\alpha =$$

$$= 0\,(N^{2/5} L^{-2\sigma} \int_0^1 |F_2 \dots F_4(\alpha)|^2\, d\alpha) = 0\,(N^{2\mu-1} L^{-2\sigma}).$$

Lemma 9:

$$\sum_{q<L^t} \sum_{a} \int_{M_{a,q}} |V_2 \dots V_5(\alpha) - V_2^* \dots V_5^*(a, a, q)|^2\, d\alpha = 0\,(N^{2\mu-1} e^{-c\sqrt{L}})$$

Beweis:

$$|V_2..V_5(\alpha)-V_2^*..V_5^*(\alpha,a,q)| \leqq |V_2..V_4(\alpha)|\,|V_5(\alpha)-V_5^*(\alpha,a,q)|+$$
$$+|V_5^*(\alpha,a,q)|\,|V_2..V_4(\alpha)-V_2^*..V_4^*(\alpha,a,q).$$

Der erste Term rechts ist nach Lemma 6 und 7

$$=0(N^{\mu}e^{-c\sqrt{L}})$$

Der zweite Term wird analog weiter abgeschätzt und hat dieselbe Größenordnung. Also ist die Summe

$$=0\Big(\sum_{q<L^t} q \int_0^{N^{-1}L^s} N^{2\mu}e^{-c\sqrt{L}}\,d\beta\Big)$$
$$=0(N^{2\mu-1}e^{-c\sqrt{L}}).$$

Lemma 10:

$$\int_0^1 \Big|\sum_{q<L^t}\sum_a{}' V_2^*\ldots V_5^*(\alpha,a,q)\Big|^2 d\alpha = 0(N^{2\mu-1}L^{-\tau})$$

wo $\sum_a{}'$ bedeutet, daß das Glied $V_2^*..V_5^*(\alpha,a,q)$ wegzulassen ist, wenn $\alpha \in M_{aq}$ und wo $\tau = s(2\mu-1)-2t$.

Beweis:

$$\Big|\sum_{q<L^t}\sum_a{}' V_2^*..V_5^*\Big|^2 \leqq \Big(\sum_q\sum_a{}' 1\Big)\Big(\sum_q\sum_a{}'\,|V_2^*..V_5^*|^2\Big).$$

Also wird das Integral

$$< L^{2t}\sum_{q<L^t}\sum_a\Big(\int_0^1 - \int_{M_{aq}}\Big)|V_2^*..V_5^*(\alpha,a,q)|^2\,d\alpha =$$
$$=0\Big(L^{2t}\sum_{q<L^t}\varphi(q)\int_{N^{-1}}^{L^s}(q^{-1/2+\varepsilon})^8\beta^{-2\mu}\,d\beta\Big) =$$
$$=0(N^{2\mu-1}L^{2t-s(2\mu-1)})$$

Lemma 11:

$$J=\int_0^1 |V_2..V_5-\sum_{q<L^t}\sum_a V_2^*..V_5^*(\alpha,a,q)|^2\,d\alpha = 0(N^{2\mu-1}L^{-\varrho})$$

wobei $\varrho=\min(2\sigma,\tau)$.

Beweis:

$$J=\int_{\Sigma M_{aq}} + \int_E$$

und

$$\int\limits_{M_{\bar{a}\,\bar{q}}} |\, V_2 \,..\, V_5 - \sum_{q<L^t} \sum_{a} V_2^* \,..\, V_5^* \,(\alpha, a, q)\,|^2\, d\alpha =$$

$$= \int\limits_{M_{\bar{a}\,\bar{q}}} |\, V_2 \,..\, V_5 - V_2^* \,..\, V_5^* \,(\alpha, \bar{a}, \bar{q})\,|^2\, d\alpha - \sum_{q<L^t} \sum_{a}{}' \, V_2^* \,..\, V_5^* \,|^2\, d\alpha$$

und für $\alpha \in E$ ist

$$\sum_{q<L^t} \sum_{a}{}' \, V_2^* \,..\, V_5^* \,(\alpha, a, q) = \sum_{q<L^t} \sum_{a} V_2^* \,..\, V_5^* \,(\alpha, a, q)$$

also

$$J = 0\,(\sum_{q<L^t} \sum_{a} \int\limits_{M_{a\,q}} |\, V_2 \,..\, V_5 - V_2^* \,..\, V_5^* \,(\alpha, a, q)\,|^2\, d\alpha +$$

$$+ \int\limits_{E} |\, V_2 \,..\, V_5 \,(\alpha)\,|^2 + \int\limits_{0}^{1} |\sum_{q<L^t} \sum_{a}{}' \, V_2^* \,..\, V_5^* \,(\alpha, a, q)\,|^2\, d\alpha)$$

daher nach Lemma 8, 9, 10

$$J = 0\,(N^{2\mu-1} L^{-\varrho}).$$

Nun führen wir die folgenden Bezeichnungen ein:

$$A_q\,(n) = \{\varphi\,(q)\}^{-4} \sum_{a} S_{a\,q}^{(2)} \,..\, S_{a,\,q}^{(5)}\, e_q\,(-na)$$

$$S\,(n) = \sum_{q<L^t} A_q\,(n)$$

$$S_1\,(n) = \{1 + A_2\,(n) + A_4\,(n)\} \prod_{2<p<\frac{1}{5}L} (1 + A_p\,(n))$$

$$V_2 \,..\, V_5\,(\alpha) = \sum_{n} r\,(n)\,(n\alpha)$$

$r\,(n)$ ist für $n \leqq N$ die Lösungszahl der Gl. (1).

Lemma 12:

$$\sum_{q<L^t} \sum_{a} V_2^* \,..\, V_5^* \,(\alpha, a, q) = \sum_{n} S\,(n)\,\psi\,(n)\,e\,(n\alpha).$$

wo für $c_1 < n \leqq N$

$$c\, n^{\mu-1} \log^{-4} n < \psi\,(n) < C\, n^{\mu-1} \log^{-4} n$$

Beweis: Die fragliche Summe ist

$$\sum_{q<L^t} \sum_{a} \{\varphi\,(q)\}^{-4}\, S_{a\,q}^{(2)} \,..\, S_{a\,q}^{(4)}\, \psi\,(n)\, e\,(n\,(\alpha - \frac{a}{q}))$$

wo

$$\psi\,(n) = \sum_{\substack{n_2 + \,..\, + n_5 = n}} \sum_{n_k = 2}^{N} \prod_{k=2}^{5} \frac{1}{n_k^{1-1/k}} \frac{1}{\log n_k}$$

Daraus folgt die Behauptung.

4.

Lemma 13: Es ist

$$1 + A_2(n) + A_4(n) = 0 \text{ für } n \not\equiv 0 \,(2)$$
$$> 0 \qquad n \equiv 0 \,(2)$$
$$1 + A_p(n) > 0 \qquad \text{für } p > 2$$

Beweis:

$$1 + A_p(n) = 1 + \sum_{a=1}^{p-1} \sum_{x,y,z,t=1}^{p-1} (p-1)^{-4} e_p(a(x^2 + y^3 + z^4 + w^5 - n))$$

Sei M_p die Anzahl der Lösungen der Kongruenz

$$x^2 + y^3 + z^4 + w^5 \equiv n \pmod{p}, \quad p \nmid x\,y\,z\,w,$$

so folgt

$$1 + A_p(n) = \frac{p}{(p-1)^4} M_p.$$

Man hat also $M_p > 0$ zu zeigen. Dazu benützen wir folgenden Satz von *Davenport* und *Chowla*: Seien $a_1, a_2, \ldots, a_m$ verschiedene Restklassen mod q und $b_1, b_2, \ldots, b_n$ verschiedene zu q teilerfremde Restklassen mod q. Dann ist die Anzahl der verschiedenen Restklassen der Form a_h und $a_i + b_k$ mindestens

$$\min(q, m + n)$$

Für $0 < x, y, z, w < p$ durchlaufen x^2 bzw. y^3, z^4, w^5 mindestens $\frac{p-1}{2}$ bzw. $\frac{p-1}{3}, \frac{p-1}{4}, \frac{p-1}{5}$ zu p teilerfremde Reste mod p. Daher ist die Anzahl der teilerfremden Reste der Form $y^3 - 1$ und $w^5 - 1$ mindestens $\frac{p-1}{3} - 1$ bzw. $\frac{p-1}{5} - 1$. Also ist die Anzahl der Reste der Form

$x^2 + 1^3$ und $x^2 + 1 + (y^3 - 1) = x^2 + y^3$ mindestens

$$\frac{p-1}{2} + \frac{p-1}{3} - 1 \tag{2}$$

und ebenso die der Form $z^4 + 1^5$ und $z^4 + w^5$ mindestens

$$\frac{p-1}{4} + \frac{p-1}{5} - 1 \tag{3}$$

Für $p \geqq 13$ ist die Summe der Anzahlen (2) und (3) $> p$. Also folgt für diese p durch Schubfachschluß $M_p > 0$. Für die anderen p sieht man dies direkt ein. Weiters ist ähnlich wie oben

$$1 + A_2(n) + A_4(n) = \frac{4}{\varphi^4(4)} M_4$$

wo M_4 die Lösungszahl von

$$x^2 + y^3 + z^4 + w^5 \equiv n \pmod 4,\ 2 \nmid x\,y\,z\,w$$

und also

$$M_4 = 0 \text{ für } n \not\equiv 0\ (2)$$
$$> 0 \text{ für } n \not\equiv 0\ (2)$$

Lemma 14: Es gilt

$$A_p(n) = 0\,(p^{-1}),\ A_q(n) = 0\,(q^{-1+\varepsilon})$$

Beweis:

$$A_p(n) \leqq \sum_{a=1}^{p-1} |\, S_{a\,p}^{(2)} \,..\, S_{a,p}^{(5)} \,|\, (p-1)^{-4}.$$

Nun ist (vgl. z. B. *Landau*, Vorlesungen über Zahlentheorie, Bd. 1, Satz 311)

$$|\, S_{a\,p}^{(k)} \,| < c\, p^{1/2}$$

und daraus folgt die Behauptung über $A_p(n)$. Der zweite Teil folgt aus

$$A_{q_1+q_2}(n) = A_{q_1}(n)\, A_{q_2}(n), \text{ wenn } (q_1, q_2) = 1.$$

Lemma 15:

$$\sum_{n=1}^{N} \{S(n) - S_1(n)\}^2 = 0\,(N\,L^{-1+\varepsilon})\}$$

Beweis: Nach Lemma 4 ist $A_{p^t}(n) = 0$ für $t > 1$, $p > 2$ und $A_{2^t}(n) = 0$ für $t > 2$. Da

$$2 \prod_{p < \frac{1}{5}L} p < L^{\pi(1/5 L)} < N^{2/5}$$

und $1/5\,L < L^t < N^{2/5}$ (t sei $\geqq 1$ und wird noch genauer festgelegt) so gilt

$$S(n) - S_1(n) = \sum_{q < L^t} A_q - \{1 + A_2(n) + A_4(n)\} \prod_{2 < p < 1/5 L} (1 + A_p(n)) =$$
$$= \sum_{1/5 L \leqq q < N^{2/5}} \delta(q)\, A_q(n), \text{ wo } \delta(q) = 0, 1 \text{ oder } -1$$

und von n nicht abhängt. Also

$$\sum_{n=1}^{N} \{S(n) - S_1(n)\}^2 = \sum_{n=1}^{N} \sum_{1/5 L \leqq q < N^{2/5}} \delta^2(q)\, A_q^2(n) +$$
$$+ \sum_{1/5 L \leqq q_1 < q_2 < N^{2/5}} A_{q_1}(n)\, A_{q_2}(n) = \Sigma_1 + \Sigma_2.$$

Nach Lemma 14

$$\sum_{1/3 L < q < N^{2/3}} \delta^2(q) A_q^2(n) = 0\left(\sum_{q > 1/3 L} q^{-2+\varepsilon}\right) = 0\left(L^{-1+\varepsilon}\right).$$

Weiters ist

$$\sum_{m < r_1 - m \leq q_1 q_2} A_{q_1}(n) A_{q_2}(n) = 0,$$

da für $(q_1, q_2) = 1$ $a_2 q_1 + a_1 q_2$ ein vollständiges reduziertes Restsystem mod $q_1 q_2$ durchläuft, wenn dies a_1, a_2 nach dem Modul q_1 und q_2 tun. Also

$$\sum_{n=1}^{N} \left| A_{q_1}(n) A_{q_2}(n) \right| \leqq \sum_{n=1}^{q_1 q_2} \left| A_{q_1}(n) A_{q_2}(n) \right| = 0\left(q_1^{\varepsilon} q_2^{\varepsilon}\right)$$

und

$$\Sigma_2 = 0\left(\sum_{1/3 L \leqq q_1 < q_2 < N^{2/3}} (q_1 q_2)^{\varepsilon}\right) = 0\left(N^{4/3+\varepsilon}\right)$$

Damit ist Lemma 15 bewiesen.

Lemma 16: Wenn n gerade ist, so

$$S_1(n) > C (\log\log N)^{-c}.$$

Beweis:

$$S_1(n) \geqq \{1 + A_2(n) + A_1(n)\} \prod_{2 < p \leq c} (1 + A_p(n)) \prod_{c < p < 1/3 L} (1 - c/p) >$$

$$> c \prod_{p < 1/3 L} (1 - p^{-1})^c > C (\log\log N)^{-c}$$

Beweis des Satzes: Nach Lemma 11, 12, 15

$$\sum_{n=3}^{N} \{r(n) - S_1(n) \psi(n)\}^2 \leqq$$

$$\leqq 2 \left[\sum_{n=3}^{N} \{r(n) - S(n) \psi(n)\}^2 + \psi^2(n) \{S(n) - S_1(n)\}^2\right] =$$

$$= 0\left(N^{2\mu-1} L^{-\varrho} + N^{2\mu-1} L^{-9+\varepsilon}\right).$$

Aus dem bisher Gesagten geht hervor, daß man h, $h_0(h)$, s, l, so wählen kann, daß $\varrho \geqq q$ wird, also

$$\sum_{n=3}^{N} \{r(n) - S_1(n) \psi(n)\}^2 = 0\left(N^{2\mu-1} L^{-9+\varepsilon}\right).$$

Nach Lemma 12, 16 folgt daraus

$$\sum_{\substack{r(n)=0 \\ n \equiv 0 \pmod 2 \\ n < N}} \frac{n^{2(\mu-1)}}{\log^8 n} - (\log\log N)^{-c} = 0\left(N^{2\mu-1} L^{-9+\varepsilon}\right)$$

und also

$$T = \sum_{\substack{r(n)=0 \\ n \equiv 0 \pmod 2 \\ n<N}} n^{2(\mu-1)} = 0\,(N^{2\mu-1} L^{-1+\varepsilon}).$$

Sei R die Anzahl der geraden $n < N$ mit $r(n) = 0$. Dann ist

$$c\, R^{2\mu-1} < \sum_{k=1}^{R} k^{2(\mu-1)} < T = 0\,(N^{2\mu-1} L^{-1+\varepsilon})$$

also

$$R = 0\,(N L^{-(1+\varepsilon)/(2\mu-1)})$$

und dies ist die Behauptung des Satzes.

Es soll noch bemerkt werden, daß Satz und Beweis sich dahin verallgemeinern lassen, daß man statt der Darstellung (1) die allgemeinere

$$n = p_2^2 + p_3^3 + p_4^4 + p^k$$

betrachtet. Man hat dann bei geradem k außer den ungeraden Zahlen noch diejenigen auszuschließen, die $\equiv 0 \pmod 3$ sind.

Literatur.

(1) *H. Davenport* und *H. Heilbronn*: On Warings Problem: Two cubes and one square, Proc. Lond. Math. Soc. 43 (1937) p. 73.

(2) *L. K. Hua*: Some results in the additive prime number theory, Quaterly Journal Oxford 9 (1938), p. 68.

(3) *F. K. Roth*: Proof that almost all positive integers are sums of a square, a positive cube and a forth power, Journal Lond. Math. Soc. 24 (1949) p. 4.

Kongruente Verlagerung kollinearer Räume in achsiale Lage.

Von

Heinrich Brauner, Wien.

Mit 4 Textabbildungen.

(Eingelangt am 25. Juli 1952.)

1. Problemstellung.

Zwei kollineare Räume haben im allgemeinen 6 *Doppelstrahlen*. In den Sonderfällen der perspektiven und der achsialen Lage existieren jedoch ∞^2 Doppelstrahlen, die ein *Bündel* bzw. *Netz* bilden. Hierdurch erscheinen diese speziellen Kollineationen besonders übersichtlich, was den Wunsch nahelegt, die allgemeinen Kollineationen auf eine der beiden Sonderformen zurückzuführen, und zwar im Sinne metrischer Fragen durch kongruente Transformationen.

Während im Falle kollinearer ebener Felder (in vereinigter Lage) immer *perspektive Lage* durch Bewegung eines Feldes hergestellt werden kann[1], ist dies im Raum bekanntlich nicht der Fall. Dies geht bereits aus einer einfachen Konstantenzählung hervor: Durch Zusammensetzung der ∞^7 *perspektiven Kollineationen* mit den ∞^6 *kongruenten Transformationen* können höchstens ∞^{13} Kollineationen erhalten werden, also niemals alle ∞^{15}.

Im Hinblick darauf, daß es jedoch ∞^9 *achsiale Kollineationen* gibt, ist die Vermutung begründet, daß sich durch Zusammensetzung derselben mit den kongruenten Transformationen sämtliche Kollineationen gewinnen lassen.

Die genauere Untersuchung der Sachlage — die auf eine Anregung Prof. *W. Wunderlichs* zurückgeht — zeigt aber, daß die Parameterabzählung hier irreführt. Beliebige kollineare Systeme lassen sich

[1] *R. Sturm*: Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften, Leipzig und Berlin (1908—1909), Bd. II, 22.

nämlich nicht durch Bewegung eines Raumes in achsiale Lage bringen, dafür aber jene besonderen, bei denen dies doch möglich ist, auf unendlich viele Arten. Diese speziellen Kollineationen werden hier näher charakterisiert, ferner die kontinuierliche Bewegung beschrieben, die ein solches Raumsystem ausführen kann, ohne aus der achsialen Lage herauszukommen.

Die Betrachtungen beschränken sich grundsätzlich auf reguläre und reelle Kollineationen.

2. Normallage kollinearer Räume.

Es liege eine beliebige Kollineation zwischen den Raumsystemen Σ und Σ' vor, die als vereinigt angesehen werden. Der *Fernebene* $\omega = v'$ entsprechen, je nachdem ob sie zu Σ oder Σ' gerechnet wird, zwei eigentliche Ebenen ω' bzw. v, die sogenannten *Gegenebenen*. Deren *Erngeraden* $w = \omega\, v$ und $w' = \omega'\, v'$ sind einander zugeordnet.

Den Geraden von Σ, die auf der Gegenebene v senkrecht stehen, entsprechen in Σ' die Strahlen eines Bündels, dessen Träger U' auf der Gegenebene ω' des Raumes Σ' liegt. In diesem Bündel gibt es einen einzigen Strahl h', der auf ω' senkrecht steht; sein entsprechender in Σ sei h. Diese Geraden h und h' heißen nach *R. Sturm*[2] die „Hauptstrahlen" der kollinearen Räume.

Die beiden Ebenenbüschel mit den Achsen h und h' sind durch die Kollineation projektiv aufeinander bezogen. Es gibt daher im ersten Büschel (mindestens) ein orthogonales Ebenenpaar $\mu \perp \nu$, dem wieder ein orthogonales Ebenenpaar $\mu' \perp \nu'$ entspricht. Diese Ebenen μ, ν bzw. μ', ν' werden die „Hauptebenen" von Σ bzw. Σ' genannt[2].

Die orthogonalen Ebenentripel μ, ν, v und ν', μ', ω' können nun stets durch eine *Bewegung* zur Deckung gebracht werden (sogar auf vier Arten), so daß es im vorliegenden Rahmen keinerlei Einschränkung bedeutet, von vornherein diese spezielle, durch $\mu = \nu'$, $\mu' = \nu$ und $\omega' = v$ gekennzeichnete Lage der kollinearen Systeme Σ und Σ' vorauszusetzen. Sie soll kurz als die „*Normallage*" bezeichnet werden.

In der Normallage entsprechen einander die Ebenen des Büschels $h = h'$ auf Grund des vertauschbaren Paares $\mu = \nu'$, $\mu' = \nu$ in einer

[2] *R. Sturm*: Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften, Leipzig und Berlin (1908—1909), Bd. III, 182. — *Th. Reye*: Die Geometrie der Lage, Stuttgart (1907), 4. Aufl., Bd. II, 329.

Involution. Gleiches gilt für die Ebenen des Büschels $w = w'$, sowie für die Punktreihen auf $h = h'$ und $w = w'$.

Unter Verwendung eines kartesischen *Normalkoordinatensystems* x, y, z, dessen Achsen das fundamentale Ebenentripel der Normallage aufspannen, und das sich noch einer homogenisierenden Koordinate t bedient, schreibt sich die Kollineation dann in der einfachen Gestalt:

$$x' = \alpha y, \quad y' = \beta x, \quad z' = \gamma t, \quad t' = \delta z \quad (\alpha\beta\gamma\delta \neq 0). \tag{1}$$

Wir wollen übereinkommen, die z-Achse in den Hauptstrahl zu legen.

3. Achsiale Kollineationen.

Eine achsiale Kollineation ist durch zwei windschiefe, punktweise feste Geraden $e = e'$, $f = f'$ gekennzeichnet, die *Achsen* der Kollineation. Diese können reell getrennt, konjugiert hochkomplex oder zusammengerückt sein. Ihre ∞^2 Treffgeraden sind durchwegs selbstentsprechend und erfüllen ein *Strahlnetz*. Die Kollineation induziert auf jedem Netzstrahl eine Projektivität entsprechender Punkte, deren Doppelpunkte auf e und f liegen, ebenso um jeden Netzstrahl eine Projektivität entsprechender Ebenen, deren Doppelebenen durch e und f gehen; alle diese Projektivitäten weisen das gleiche charakteristische Doppelverhältnis δ auf.

Die *Gegenebenen* ω' und v haben mit der Fernebene $\omega = v'$ den uneigentlichen Netzstrahl gemein, liegen also parallel zum Achsenpaar e, f; die Abstände $\overline{e\omega'}$ und $\overline{fv}$ sind hierbei entgegengesetzt gleich[3].

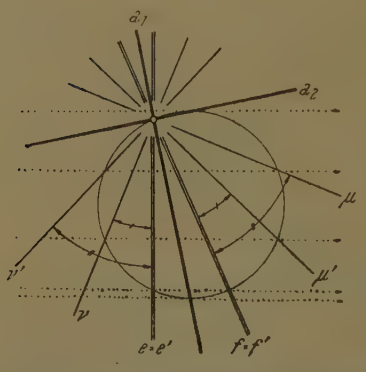
Das (selbstentsprechende und stets reelle) Gemeinlot $h = h'$ des Achsenpaares e, f ist zu den Gegenebenen normal, stellt also für die beiden Systeme den *Hauptstrahl* dar.

Die *Hauptebenen* ergeben sich in den entsprechenden Normalebenenpaaren $\mu \perp \nu$, $\mu' \perp \nu'$ der Projektivität um $h = h'$. Sie bilden mit den Doppelebenen (durch e und f) bekanntlich paarweise gleiche Winkel, wie dies Abb. 1 zeigt.

Durch jenen auf dem Hauptstrahl h gelegenen Punkt H, der sich in der Mitte zwischen den Gegenebenen ω' und v befindet — oder, was dasselbe bedeutet, in der Mitte zwischen den Achsen e und f —, werde nun eine Gerade a gezogen, die normal zum Hauptstrahl verläuft und den Winkel der Richtungen von e und f hälftet. Diese Gerade ist zwei-

[3] *Th. Reye*: a. a. O., 80.

deutig festgelegt und auch im Falle konjugiert imaginärer Doppelstrahlen stets reell: Abb. 1 zeigt ihre Konstruktion mit Hilfe des Steinerkreises.



Abd. 1. Blick in Richtung des Hauptstrahles auf die Achsen und Normalebenen einer achsialen Kollineation.

Nun werde das System Σ' einer 180°-Drehung um eine der beiden Achsen a unterworfen. Nach dieser „Umwendung" sind die Hauptstrahlen h, h' neuerlich in Deckung, zusätzlich aber noch die Gegenebenen ω', v und — auf Grund der aus Abb. 1 ersichtlichen Symmetrieverhältnisse — wechselseitig die Hauptebenenpaare $\mu \perp \nu$ und $\mu' \perp \nu'$: Damit ist aber *Normallage* hergestellt.

Satz 1: *Jede achsiale Kollineation läßt sich auf (wenigstens) zwei Arten durch eine Umwendung in Normallage bringen.*

Mehr als zwei Umwendungen treten im Falle unendlich vieler Normalebenenpaare auf, also bei isotropen Achsen e, f oder $e \perp f$ und $\delta = -1$ (vgl. Abschnitt 8).

4. Eichzylinder und Eichkegel.

Soll achsiale Lage zwischen zwei gemäß Abschnitt 2 in Normallage befindlichen kollinearen Räumen Σ und Σ' hergestellt werden können, so muß es in Σ und Σ' *kongruente* entsprechende Punktreihen geben, deren Träger den Hauptstrahl $h = h'$ normal treffen und nach Ausführung einer Bewegung zur Deckung kommen, um so die Achsen der Kollineation zu liefern.

Jede *Normale* r des Hauptstrahles trifft die selbstentsprechende Ferngerade $w = w'$, geht also wieder in eine Hauptstrahlnormale r' über. Überdies sind die entsprechenden Punktreihen auf r und r' wegen der zugeordneten Fernpunkte von vornherein *ähnlich*. Es geht also nur noch darum, die *kongruenten* Punktreihen auszusondern.

Einem als *Eichfläche* fungierenden *Drehzylinder* Φ aus Σ, der den Hauptstrahl h zur Achse und den Radius 1 hat,

$$x^2 + y^2 = t^2, \tag{2}$$

entspricht in Σ' ein eigentlicher, vom Ursprung U' ausstrahlender und

mit Φ koachsialer Kegel 2. Grades Φ', dessen Gleichung sich aus (1) und (2) zu

$$\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{y'}{\beta}\right)^2 = \left(\frac{z'}{\gamma}\right)^2 \tag{3}$$

ergibt; er soll kurz als „*Eichkegel*" angesprochen werden. Umgekehrt entspricht dem zu Σ' gehörigen, in der Normallage mit Φ zusammenfallenden Eichzylinder Ψ'

$$x'^2 + y'^2 = t'^2 \tag{4}$$

ein analoger Eichkegel Ψ in Σ:

$$(\beta x)^2 + (\alpha y)^2 = (\delta z)^2 \tag{5}$$

Die koachsialen Flächen Φ und Ψ schneiden einander nach einer *Raumkurve 4. Ordnung* q, die die Ebenen μ, ν, v zu Symmetrieebenen hat. Ihr ist die analoge Durchdringungskurve q' von Φ' und Ψ' kollinear zugeordnet (vgl. Abb. 2).

Jeder *geraden Punktreihe* r aus Σ, deren Träger den Hauptstrahl h rechtwinkelig schneidet und einen Punkt Q von q enthält, entspricht in Σ' wegen $\overline{Qh} = \overline{Q'h'} = 1$ eine *kongruente*, analog angeordnete Punktreihe r'. Damit sind die für uns in Frage kommenden kongruenten Punktreihen gefunden.

Die Träger der kongruenten Punktreihen r, r' bilden zwei kollineare Strahlflächen Θ und Θ'; es sind gerade *Konoide* mit den Gegenebenen als Richebenen. Die Leitgeraden $h=h'$ und $w=w'$ sind aus Symmetrie gründen Doppelgeraden der Flächen; beispielsweise gehen durch jeden Punkt von h und w genau zwei Erzeugende von Θ. Zwischen den Punktreihen auf h und w besteht mithin eine algebraische (2,2)-Korrespondenz. und Θ ist als ihr Erzeugnis eine *Strahlfläche 4. Grades*[4]. Da sie keine Doppelerzeugende besitzt, ist sie vom Geschlecht 1 und nach der *Sturm*schen Einteilung von *I. Art*[5]. Sie besitzt 4 reelle Torsallinien, die in den Hauptebenen μ, ν liegen, ihre Kuspidalpunkte auf der Hauptachse h haben und je zwei Scheitel der Quartik q tragen.

Die Gleichung dieser Strahlfläche Θ ergibt sich aus (2) und (5) durch Division zu

---

[4] *E. Müller-J. Krames*: Vorlesungen über Darstellende Geometrie, Leipzig und Wien (1931), Bd. III, 48.

[5] *E. Müller-J. Krames*: a. a. O., 269.

$$\delta^2 z^2 (x^2 + y^2) = (\beta^2 x^2 + \alpha^2 y^2) t^2. \tag{6}$$

Die Gleichung der entsprechenden Fläche Θ' lautet

$$\alpha^2 \beta^2 z'^2 (x'^2 + y'^2) = (\beta^2 x'^2 + \alpha^2 y'^2) \gamma^2 t'^2. \tag{7}$$

Satz 2: *Die Gesamtheit der den Hauptstrahl treffenden geraden Punktreihen eines Raumes, denen im kollinearen Raum kongruente Reihen entsprechen, erfüllen ein gerades Konoid 4. Grades I. Art.*

Abschließend noch eine Bemerkung über die *Eichkegel* Θ' und Ψ: Betrachtung der Gleichungen (3) und (5) zeigt, daß die normal zum Hauptstrahl geführten *Parallelschnitte* für beide Kegel *ähnliche und ähnlich gelegene Ellipsen* liefern, was letzten Endes auf die involutorische Zuordnung der Ebenen durch den Hauptstrahl zurückzuführen ist.

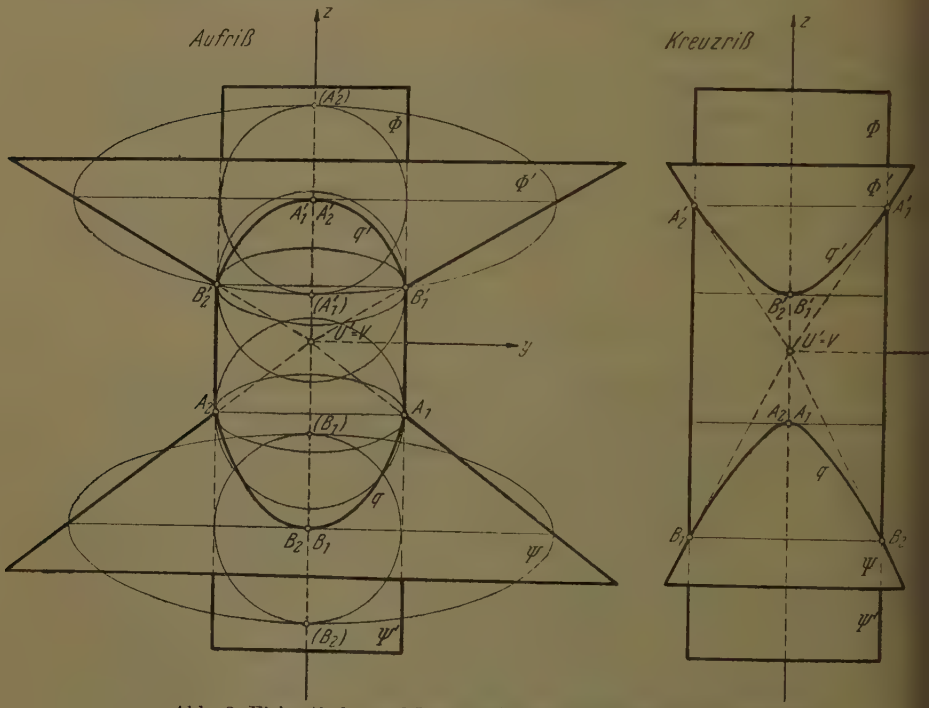


Abb. 2. Eichzylinder und Eichkegel einer Kollineation in Normallage.

Dieser Sachverhalt wurde in Abb. 2 hervorgehoben, in der im Aufriß gewisse Schnittellipsen umgeklappt eingezeichnet wurden. Die Eichkegel Θ' und Ψ sind dabei nicht als Doppelkegel eingetragen, so daß von den Quartiken q und q' nur je ein Zug zu sehen ist. Der zweite Zug wäre jeweils symmetrisch zur (x, y)-Ebene angeordnet.

5. Notwendige und hinreichende Bedingungen.

Die Antwort auf die zur Diskussion stehende Frage wird nun wesentlich davon abhängen, ob die Eichkegel *achsial-kollinearer* Systeme in irgendeiner Weise ausgezeichnet sind oder nicht.

Fassen wir einmal, ergänzend zu den in Abschnitt 3 gemachten Feststellungen über die achsiale Kollineation, die beiden zum Hauptstrahl $h = h'$ normalen und die Achsen $e = e'$ bzw. $f = f'$ enthaltenden (selbstentsprechenden) Ebenen $\varepsilon = \varepsilon'$ bzw. $\varphi = \varphi'$ ins Auge: Die Zuordnungen $\varepsilon \to \varepsilon'$ und $\varphi \to \varphi'$ sind perspektive Affinitäten; die in der betreffenden Ebene gelegene Kollineationsachse ist gleichzeitig Affinitätsachse, während die andere die Affinitätsstrahlrichtung angibt. Die Streckungsfaktoren sind reziprok und betragen $1/\delta$ bzw. δ, wobei $\delta = (X, X', e, f)$ die Charakteristik der achsialen Kollineation bezeichnet. Der in der Ebene ε liegende Kreis k unseres Eichzylinders Φ wird mithin in eine konzentrische Ellipse k' des Eichkegels Φ' transformiert, wobei der auf e liegende Durchmesser die Länge 2 behält, während der zu f parallele sich auf $2/\delta$ verkürzt. Die entsprechenden Überlegungen für den Eichzylinder Ψ' und seinen Schnittkreis l' mit φ', der in eine konzentrische und zu k' kongruente Ellipse l des Eichkegels Ψ übergeht, lehren, daß die Eichkegel *kongruent* sind, da ja wegen der symmetrischen Anordnung der die Spitzen abgebenden Gegenpunkte U' und V auch die Höhen übereinstimmen (Abb. 3).

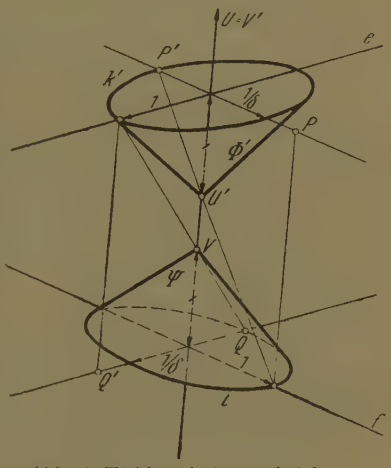


Abb. 3. Eichkegel einer achsialen Kollineation.

Damit besitzen wir eine *notwendige* Bedingung für die Herstellbarkeit achsialer Lage:

Satz 3: *Bei kollinearen Räumen, die sich durch kongruente Transformationen in achsiale Lage bringen lassen, sind die beiden Eichkegel kongruent.*

Bei Ausführung der die *Normallage* herstellenden Umwendung gemäß Satz 1 kommen die Eichkegel zur Deckung, da ihre Spitzen U' und V sowie die Ellipsen k' und l zusammenfallen.

Satz 3a: *Bei kollinearen Räumen, die sich durch kongruente Transformationen in achsiale Lage bringen lassen, fallen in der Normallage die Eichkegel zusammen.*

Der *analytische* Ausdruck für diese Bedingung lautet, wie der Vergleich von (3) und (5) lehrt

$$\alpha^2 \beta^2 = \gamma^2 \delta^2. \tag{8}$$

Mit dem Auftreten einer *notwendigen Bedingung* ist — entgegen den durch die Konstantenzählung nahegelegten Erwartungen, somit überraschend — eine *negative Beantwortung* des aufgeworfenen Problems gesichert. Es bleibt nur noch zu prüfen, ob die gefundene Bedingung auch eine *hinreichende* ist.

Sei also, Normallage vorausgesetzt, für identische Eichzylinder $\Phi = \Psi'$ die nach Satz 3a notwendige Identität der Eichkegel $\Phi' = \Psi$ erfüllt. Die Quartik $q = \Phi\,\Psi = \Psi'\,\Phi' = q'$ ist dann *selbstentsprechend*, ebenso das zugehörige Konoid $\Theta = \Theta'$, dessen Erzeugenden kongruente Punktreihen tragen. Einer Erzeugenden $r = s'$, gleichgültig ob sie zum ersten oder zweiten System gerechnet wird, entspricht auf Grund der involutorischen Zuordnung in den Büscheln w und h ein und dieselbe Erzeugende $r' = s$. Auch die Erzeugenden von Θ sind demnach involutorisch gepaart.

Sei P ein beliebiger Punkt von q, P' der ihm entsprechende. Das Urbild Q jenes Punktes Q', der mit P zusammenfällt, liegt nach dem Gesagten mit P' auf der gleichen Erzeugenden, ist also entweder mit P' identisch oder liegt zu P' spiegelbildlich bezüglich $h = h'$.

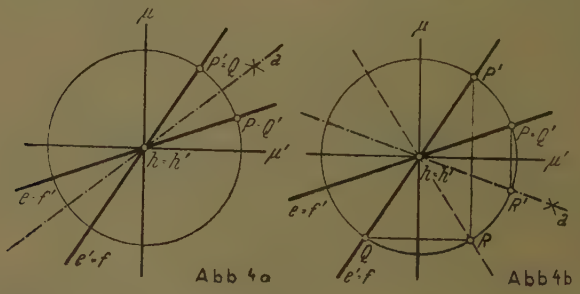


Abb. 4. Wechselseitige Zuordnung zweier entsprechender Punkte der Quartik $q = q'$ (Hauptstrahl als Blickrichtung).

Im *ersten Fall* (Abb. 4a) existiert eine Umwendung, die $P' = Q$ mit $P = Q'$ und gleichzeitig die beiden Erzeugenden punktweise zur Deckung bringt, womit die achsiale Lage hergestellt ist.

Im *zweiten Fall* (Abb. 4b) existiert keine solche Drehung. *Spiegelt* man jedoch das System Σ' an der Ebene $\mu' = \nu$ — wodurch die Normallage nicht zerstört wird — so werden die Verhältnisse des ersten Falles hergestellt: Dem zu Q' bezüglich μ' symmetrischen Punkt R' entspricht nämlich der zu Q bezüglich μ symmetrische Punkt R, und durch die genannte Spiegelung kommt R' mit P und gleichzeitig P' mit R zur Deckung.

Die Bedingung kongruenter Eichkegel ist demnach auch *hinreichend*; in Hinblick darauf, daß der verwendete Punkt P von q auf ∞^1 Arten gewählt werden kann, gilt sogar:

Satz 4: *Sind in kollinearen Räumen die beiden Eichkegel kongruent, so ist achsiale Lage durch kongruente Transformationen herstellbar, und zwar auf ∞^1 Arten.*

Da diese Bedingung bei *achsialen Kollineationen* von vornherein erfüllt ist, so gilt:

Satz 5: *Jede achsiale Lage kollinearer Räume kann durch Bewegung eines Raumes in ∞^1 andere achsiale Lagen übergeführt werden.*

Damit ist nun der scheinbare Widerspruch zur Konstantenzählung in Abschnitt 1 vollkommen aufgeklärt: Die Kombination der ∞^9 achsialen Kollineationen mit den ∞^6 kongruenten Transformationen liefert nicht alle ∞^{15} Kollineationen, sondern nur ∞^{14} spezielle (durch kongruente Eichkegel ausgezeichnete), dafür jede derselben auf ∞^1 Arten.

Fassen wir nochmals eine Normallage, die die obige Bedingung erfüllt, ins Auge: Die Doppelebenen der Ebeneninvolutionen um $h = h'$ und $w = w'$ bilden das *Doppeltetraeder* der Kollineation. Existiert nun ein vertauschbares Punktepaar $P = Q'$, $P' = Q$, wie im Falle Abb. 4a, so ist die Gerade $g = PQ = Q'P' = g'$ selbstentsprechend. Ihre Schnittpunkte mit den Doppelebenen bleiben fest, müssen also auf zwei Gegenkanten des Doppeltetraeders liegen; andernfalls gäbe es nämlich punktweise feste Doppelebenen und es läge eine Zentralkollineation oder gar die Identität vor, was offenbar auszuschließen ist. Die von $g = g'$ getroffenen Gegenkanten enthalten nun je drei Fixpunkte, sind also punktweise fest. Es liegt demnach eine *achsiale Kollineation* vor, und zwar eine *involutorische* ($\delta = -1$) wegen des vertauschbaren Punktepaares P, P'.

Satz 6: *Bei jeder Kollineation, die sich durch bloße Bewegung in achsiale Lage bringen läßt, ist bereits die Normallage achsial, und zwar involutorisch.*

Analytisch sind die beiden Fälle Abb. 4a und Abb. 4b durch die Bedingungen $\alpha\beta = \gamma\delta$ bzw. $\alpha\beta = -\gamma\delta$ unterschieden, in welche

sich die Bedingung (8) aufspaltet. Im ersten Fall ist die Normallage involutorisch und man erkennt leicht, daß dann und nur dann die Involutionen auf bzw. um $h = h'$ gleichartig sind. In diesem Falle und nur in diesem läßt sich durch Bewegungen allein achsiale Lage herstellen.

6. Konoid der Umwendungsachsen.

Mit Satz 4 wurde erkannt, daß bei kollinearen Räumen, die sich durch Bewegung in achsiale Lage bringen lassen, ∞^1 *Umwendungen* dies gestatten. Alle Umwendungsachsen bilden daher eine Strahlfläche Γ, ein gewisses *Konoid*, dessen Gleichung nun abgeleitet werden soll. Nach dem vorhin Gesagten ist von vornherein

$$\alpha\,\beta = \gamma\,\delta \tag{9}$$

vorauszusetzen.

Sei nun $P(x_1 : y_1 : z_1 : t_1)$ der in Abschnitt 5 benützte allgemeine Punkt der selbstentsprechenden Quartik $q = q'$; seine Koordinaten genügen zufolge (2) und (5) den Gleichungen

$$x_1^2 + y_1^2 = t_1^2, \quad \beta^2 x_1^2 + \alpha^2 y_1^2 = \delta^2 z_1^2. \tag{10}$$

Der kollinear entsprechende Punkt P' hat gemäß (1) die Koordinaten

$$x_1' : y_1' : z_1' : t_1' = \alpha\, y_1 : \beta\, x_1 : \gamma\, t_1 : \delta\, z_1. \tag{11}$$

Die Achse der Umwendung, die P mit P' vertauscht, halbiert den Winkel und Abstand der aus P und P' auf den Hauptstrahl (also die z-Achse) fällbaren Lote, wird also festgelegt durch

$$x : y = \left(\frac{x_1}{t_1} + \frac{x_1'}{t_1'}\right) : \left(\frac{y_1}{t_1} + \frac{y_1'}{t_1'}\right) = (\delta\, x_1 z_1 + \alpha\, y_1 t_1) : (\delta\, y_1 z_1 + \beta\, x_1 t_1) \tag{12}$$

und

$$z : t = \tfrac{1}{2}\left(\frac{z_1}{t_1} + \frac{z_1'}{t_1'}\right) = (\delta\, z_1^2 + \gamma\, t_1^2) : 2\,\delta\, z_1 t_1. \tag{13}$$

Der Ort der Umwendungsachsen ergibt sich nun durch Elimination der Veränderlichen x_1, y_1, z_1, t_1 aus den vier homogenen Gleichungen (10) und (12). Zu diesem Zweck lösen wir (12) nach x_1 und y_1 auf

$$x_1 : y_1 = (\delta\, z_1\, x - \alpha\, t_1\, y) : (\delta\, z_1\, y - \beta\, t_1\, x)$$

und gehen damit in den Quotienten des Gleichungspaares (10) ein; wir erhalten so die Beziehung

$$(\delta^2 z_1^2 - \alpha^2 t_1^2) : (\beta^2 t_1^2 - \delta^2 z_1^2) = (\delta\, z_1\, x - \alpha\, t_1\, y)^2 : (\delta\, z_1\, y - \beta\, t_1\, x)^2$$

oder — nach x, y geordnet und durch den i. a. nicht verschwindenden Ausdruck $\delta^2 z_1^2 - \alpha\beta t_1^2$ gekürzt —

$$(\delta^2 z_1^2 + \alpha\beta t_1^2)\quad (x^2 + y^2) = 2(\alpha + \beta)\,\delta z_1 t_1 \quad x\,y.$$

Mit Rücksicht auf (9) lassen sich nun mittels (13) auch z_1 und t_1 wegschaffen, und wir erhalten schließlich

$$\delta(x^2 + y^2)\,z = (\alpha + \beta)\,x\,y\,t \tag{14}$$

als Gleichung der Strahlfläche Γ, die damit als *Plückersches Konoid* zu erkennen ist.

Satz 7: *Die Strahlfläche der Umwendungsachsen ist ein Plückersches Konoid mit dem Hauptstrahl als Achse und den Schnittgeraden der Hauptebenen mit der Gegenebene als Mittelerzeugenden.*

Die beiden Torsallinien der Fläche Γ liegen in den Ebenen $z : t = \pm(\alpha + \beta) : 2\delta$ und haben die Richtungen $x : y = \pm 1 : 1$. Sie sind die Umwendungsachsen der reellen Torsalerzeugenden von Θ.

Die beiden punktweise selbstentsprechenden Erzeugenden von Θ dargestellt durch

$$x : y = \pm\sqrt{\alpha/\beta},\quad z : t = \pm\sqrt{\gamma/\delta} \tag{15}$$

fallen mit den zugehörigen Umwendungsachsen zusammen und gehören daher auch dem Plückerkonoid Γ an. Diese Umwendungen führen auf *parabolische* Achsenkollineationen und trennen, falls sie reell sind, — also wenn $\alpha\beta = \gamma\delta > 0$ —, auf Γ die Bereiche jener Umwendungsachsen, die auf hyperbolische bzw. elliptische Achsenkollineationen führen. Im Falle $\alpha\beta = \gamma\delta < 0$ entstehen ausschließlich hyperbolische Achsenkollineationen.

7. Kontinuierliche Lagenschar der umgewendeten Räume.

Wird Σ' der Reihe nach an allen ∞^1 vorhandenen Achsen umgewendet, so entsteht eine kontinuierliche Lagenfolge, die eine bestimmte *zwangläufige Bewegung* definiert. Eine Bewegung, die wie diese zustande kommt, daß man ein festes Raumsystem Σ' an den Erzeugenden einer Strahlfläche Γ spiegelt, heißt nach *J. Krames* eine symmetrische Schrotung mit der Grundfläche Γ[6]. Im vorliegenden Falle handelt es sich — wie stets wenn die Grundfläche ein aufrechtes Konoid ist — um eine schraubenartige Bewegung um die Konoidachse, also den Hauptstrahl $h = h'$.

[6] *J. Krames*: Über Fußpunktkurven von Regelflächen und eine besondere Klasse von Raumbewegungen, Mh. Math. Phys. 45 (1937), 394—406.

Die *Bahnkurven* aller von der Achse gleich weit entfernten Punkte sind offensichtlich untereinander kongruent und verlaufen auf einem Drehzylinder; alle übrigen können durch achsiale Streckung erhalten werden, sind also untereinander affin. Die Bahnkurven gehen aus den *Fußpunktskurven* des Grundkonoids durch Maßstabverdopplung hervor, sind also ähnlich zu den Schnittkurven von Γ mit Drehzylindern, die die Achse enthalten. Für diese Schnittkurven treten beim Plückerkonoid bekanntlich *Ellipsen* auf: Wir sind damit auf eine merkwürdige, bereits von *G. Darboux* entdeckte Raumbewegung gestoßen, bei der alle Punkte auf Ellipsen laufen[7]; diese Ellipsen haben übrigens sämtlich die gleiche Exzentrizität (= Höhe des Konoids Γ).

Ergänzend zu Satz 5 gilt mithin:

Satz 8: *Sind zwei kollineare Raumsysteme in achsialer Lage, dann kann man eines von ihnen einer kontinuierlichen schraubenartigen Bewegung um den Hauptstrahl unterwerfen, ohne daß die achsiale Zuordnung zerstört wird. Die genannte Bewegung ist der Darbouxsche Umschwung, bei dem alle Punkte auf Ellipsen laufen.*

8. Sonderfälle.

Die Herstellung der Normallage beruht nach Abschnitt 2 auf der Ermittlung entsprechender Normalebenenpaare $\mu \perp \nu$, $\mu' \perp \nu'$ in den projektiven Ebenenbüscheln um die Hauptstrahlen h und h'. Der Sonderfall *kongruenter* Ebenenbüschel, wo also unendlich viele Normalebenenpaare zur Verfügung stehen, verdient besondere Beachtung.

In diesem Fall besitzen die Eichkegel Φ' und Ψ ∞^1 Symmetrieebenen, sind also *Drehkegel*. Die Schnittkurven $q = \Phi\,\Psi$ und $q' = \Phi'\,\Psi'$ zerfallen in je zwei kongruente Kreise, die die Hauptachse h bzw. h' zur Rotationsachse haben und symmetrisch zu den Gegenebenen angeordnet sind. Entsprechende Kreisebenen sind kongruent aufeinander bezogen, können also stets punktweise zur Deckung gebracht werden. Damit ist dann aber perspektive Lage hergestellt.

Die zur Herstellung achsialer Lage erforderliche Bedingung kongruenter Eichkegel ist, wie man unschwer einsieht, nur für die *parabolische* und die *involutorische* Zentralkollineation ($\delta = \pm 1$) erfüllt. Im *ersten* Fall (Zentrum in der Fixebene) ist achsiale Lage durch

[7] *G. Darboux*: Sur le déplacement d'une figure invariable, C. R. 92 (1881), 118—121 · Vgl. *J. Krames*: Zur aufrechten Ellipsenbewegung des Raumes, Mh. Math. Phys. 46 (1938), 38—50.

Bewegungen herstellbar, da in der Normallage die Involutionen um $h = h'$ und $w = w'$ gleichartig sind; die durch die Normallage selbst dargestellte involutorisch achsiale Lage ist „rotatorisch" und hat entweder orthogonale oder isotrope Achsen. Sie wird beschrieben durch

$$x' = y, \quad y' = \pm x, \quad z' = t, \quad t' = \pm z. \tag{16}$$

Im *zweiten* Fall (Gegenebenen vereinigt) ist die achsiale Lage nur durch gegensinnig-kongruente Transformationen herbeizuführen.

Satz 9: *Kollineationen mit kongruenten Drehkegeln als Eichkegeln lassen sich durch kongruente Transformationen sowohl in perspektive als auch in achsiale Lage bringen. Erstere ist entweder parabolisch oder involutorisch, letztere gleichsinnig- oder gegensinnig-rotatorisch. Durch Drehung um den Hauptstrahl wird die achsiale Lage nicht zerstört.*

Ein anderer Sonderfall ist der der affinen Räume. Allfällige achsiale Lage ist wegen der selbstentsprechenden Fernebene nur so möglich, daß eine der Achsen ins Unendliche rückt; es liegt dann eine (i. a. schiefe) *„achsiale Streckung"* vor. Betrachtung der Transformation einer *Kugel* führt schnell zu folgendem Ergebnis:

Satz 10: *Zwei affine Räume Σ und Σ' können dann und nur dann durch kongruente Transformationen in achsiale Lage gebracht werden, wenn auf dem Ellipsoid aus Σ', das einer beliebigen Kugel aus Σ entspricht, der Abstand der parallelen Tangentialebenen in zwei gegenüberliegenden Nabelpunkten gleich dem Kugeldurchmesser ist.*

Man kann nämlich dann die genannten Nabelberührebenen mit den entsprechenden Kugeltangentialebenen zusammenfallen lassen, so zwar, daß die Ferngeraden punktweise zur Deckung kommen. Diese Lage ist nur bis auf ∞^2 Schiebungen bestimmt, aber auf jeden Fall achsial.

Es ist also ähnlich wie bei den Kollineationen: Die Kombination der ∞^7 achsialen Streckungen mit den ∞^6 kongruenten Transformationen liefert nicht alle ∞^{12} Affinitäten, sondern nur ∞^{11} spezielle, diese jedoch auf je ∞^2 Arten.

Buchbesprechungen.

Mathematische Logik. Von *H. Hermes* und *H. Scholz*. Zweite Auflage. („Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften": Band I, Heft 1, Teil I.) 82 S. Leipzig: B. G. Teubner. 1952. DM 8.20.

Der Artikel beschränkt sich auf die klassische zweiwertige Logik, behandelt diese jedoch mit großer Sorgfalt. Sowohl der semantische als auch syntaktische Weg werden beim Aufbau der logischen Kalküle beschritten. Das Schwergewicht ruht naturgemäß auf der Behandlung des Aussagen-Prädikaten- und des durch die Identität erweiterten Prädikatenkalküls. Die intuitionistische Logik, mehrwertige Logiken und Verbindungen zur Booleschen Algebra erfreuen sich gelegentlicher Hinweise, sind aber nicht in den Artikel aufgenommen. Die wichtige Theorie der rekursiven Funktionen (und gleichwertige Begriffe) wird im Rahmen des zentralen Problems der Entscheidbarkeit in straffer Darstellung besprochen. Hauptergebnisse sind mit knappen Beweis versehen. (Satz von Löwenheim-Skolem, Satz von Gödel). Der letztgenannte Satz wird sinngemäß bei der Besprechung der Antinomie von Richard und der des Lügners dargeboten. Gentzens Kalkül des natürlichen Schließens und sein Sequenzkalkül wird durch einen Beitrag von Hasenjaeger (Konsequenzenlogik) als Abschluß mitgeteilt. In der Einleitung wird das Schrifttum sehr vollständig angeführt. Der Zeitpunkt des Erscheinens hat es offenbar unmöglich gemacht, auch schon auf die meist ausgezeichneten einschlägigen Monographien, die von Beth, Brouwer und Heyting in der North-Holland Company herausgegeben werden, hinzuweisen. *L. Schmetterer*, Wien.

Many-valued Logics. Von *J. B. Rosser* und *A. R. Turquette*. (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics.) 124 S. Amsterdam: North-Holland Publishing Company. 1952. hfl. 12.—.

Am Schluße des Buches verweisen die Verf. auf eine Reihe ungelöster Probleme, wobei sie auch die interessante Frage stellen, ob es Probleme gibt, welche durch eine mehr als zweiwertige Logik, aber nicht durch die gewöhnliche Logik gelöst werden können. Wenn es auch scheint, als ob man sehr weit von der Lösung dieser Frage entfernt ist, die vielleicht das Konzept einer mehrwertigen Logik prinzipiell überflüssig machen könnte, bietet doch meines Erachtens das Studium mehrwertiger Logiken auch nur ihrer selbst willen ein interessantes Feld. Das Unternehmen der Verf., eine geschlossene Darstellung unter reichlicher Berücksichtigung auch der neueren Literatur zu geben, muß als verdienstvoll angeschen werden und die Arbeitsrichtung der beiden Autoren geben dem Leser die Überzeugung, daß das Unternehmen bei ihnen in guten Händen ist. In Verallgemeinerung des zweiwertigen Kalküls wird zunächst der mehrwertige Aussagenkalkül als Theorie mehrwertiger Wahrheitsfunktionen entwickelt und hierauf syntaktisch vorgegangen. Das zugrundegelegte Axiomensystem wird als deduktiv vollständig nachgewiesen. U. a. werden auch kurz die Beziehungen zu Lewis System der strict implication erörtert, womit eine Brücke zur Modalitätenlogik geschlagen ist. Ähnlich wird auch bei der Einführung des mehrwertigen Prädikatenkalküls vorgegangen, wobei der Begriff des Quantors so

gefaßt wird, daß er sich auf mehrere Individuen (endlich viele) zugleich erstreckt. Besonderes Interesse muß es erwecken, daß sich der Satz von der Vollständigkeit des zweiwertigen Prädikatenkalküls und der Satz von Löwenheim-Skolem, die ja eine zentrale Rolle im zweiwertigen Kalkül spielen, hier übertragen lassen. Zu diesem Zweck verallgemeinern die Verf. den erst unlängst gefundenen Beweis von Henkin für den Gödelschen Vollständigkeitssatz. Unter den Anwendungen heben wir die Hinweise auf den Kalkül von Barzan hervor, dem die Entwicklungen von Lewis zu Grunde liegen. Das Buch ist nicht immer ganz leicht, aber interessant zu lesen.

L. Schmetterer, Wien

The Continuum of Inductive Methods. Von *R. Carnap*. V, 92 S. Chicago: The University of Chicago Press. 1952. $ 3.50.

Es wird eine Theorie der induktiven Methoden gegeben. Diese basiert auf dem Konzept der Wahrscheinlichkeit in induktivem Sinn (confirmation), welches dem Rahmen des groß angelegten Werkes „Probability and Induction" (I. Band 1950) des Verf. angehört. Nach des Autors Angabe ist die vorliegende Schrift Vorwegnahme gewisser Ergebnisse, welche sich im II. Band des Werkes vorfinden werden. Man könnte den Wahrscheinlichkeitsbegriff des Verf. als abstrakte Fassung eines subjektiven Wahrscheinlichkeitsbegriffes bezeichnen und ihn in diesem Sinne mit dem Konzept von Jeffreys, insbesondere aber mit dem von Good (Probability and the weighing of evidence) vergleichen. Zu den induktiven Methoden zählt der Verf. auch die Methode der Schätzung eines Parameters, doch beschränkt sich die Darstellung auf die Schätzung von Häufigkeiten, entsprechend der Häufigkeitsauffassung in der Wahrscheinlichkeitstheorie. Der Verf. zitiert als Vertreter dieser Auffassung u. a. Cramér, Wald und Wilks. Jedoch ist meines Erachtens hinzuzufügen, daß die genannten Autoren ihren Untersuchungen den maßtheoretischen Wahrscheinlichkeitsbegriff der Mathematik, wie ihn Kolmogoroff eingeführt hat, zu Grunde legen und die Häufigkeitsauffassung nur als Brücke vom mathematischen Kalkül zu den empirischen Gegebenheiten benützen, jedoch den Begriff der Häufigkeit nicht in den Kalkül einbeziehen. Mit Recht zitiert der Verf. in diesem Zusammenhange v. Mises, doch wenn auch die genannten Mathematiker die Häufigkeitsinterpretation den Ideen von Mises entlehnt haben, unterscheidet sich die kalkülmäßige Fassung der Wahrscheinlichkeitstheorie von Cramér, Kolmogoroff usw. beträchtlich von der von Mises.

Eine Methode der confirmation besteht in Angabe einer numerischen Funktion, dem Grad der confirmation, welche von einer Hypothese unter Zugrundelegung empirisch gefundener Fakten abhängt. Sowohl die Hypothese als auch die empirischen Evidenzen werden in der Sprache des Prädikatenkalküls formuliert. Hiebei bedient sich der Autor gewisser disjunktiver Normalformen, wobei die Konstituenten nur endlich viele Prädikate durchlaufen. Der Grad der confirmation genügt gewissen Postulaten, die zum Teil in Analogie zu den Forderungen stehen, die man an den mathematischen Wahrscheinlichkeitsbegriff stellt, anderseits aber durch die Struktur der Funktion als abhängig von Aussagen bedingt sind. Wesentlich ist nun der Übergang von dieser Funktion zur sogenannten charakteristischen Funktion, welche — beiläufig gesagt — von der Anzahl der Konstituenten, dem Umfang der Stichprobe, welche die empirischen Gegebenheiten in Evidenz setzt und der Häufigkeit des betrachteten Merkmales in der Stichprobe, abhängt. Auf Grund einer Anzahl plausibler Annahmen gelingt es zu zeigen, daß die charakteristische Funktion in Abhängigkeit von einem nicht negativen Parameter λ betrachtet werden kann,

welcher auch den Wert $+\infty$ annehmen kann, so daß man also vermöge dieser einen Funktion ein Kontinuum von induktiven Methoden geliefert bekommt. Die Methode der Schätzung wird auf diese Konzeptionen zurückgeführt. Soweit Teil I. Teil II betitelt sich: Vergleich des Erfolges der induktiven Methoden. Hiezu wird die mittlere quadratische Abweichung der durch die Theorie des Verf. gelieferten Schätzfunktionen herangezogen und hierauf die Auswahl des oben eingeführten Parameters λ gegründet, welche eine optimale Methode bestimmt. Es zeigt sich z. B., daß das Maximum likelihood-Prinzip, welches der Wahl $\lambda=0$ entspricht, nicht stets mit der optimalen Methode zusammenfällt.

Für die moderne Theorie der statistischen Entscheidungsfunktionen ist besonders der Anhang von Bedeutuug, der zeigt, daß des Autors Methode gewisse Unzulänglichkeiten der Theorie von Wald vermeidet. Es wäre aber zu erwähnen, daß der auf dem Boden der Mathematik stehende Statistiker die Ausführungen des Verf. mit Interesse verfolgen wird, jedoch wird er darauf hinweisen, daß die Konzeptionen von Fisher und Wald u. a., aufgebaut auf dem maßtheoretischen Wahrscheinlichkeitskalkül der Mathematik, sich als sehr fruchtbar erwiesen haben und eine Reihe von Eigenschaften ihrer Prinzipien eine auch induktiv zu deutende Berechtigung erfahren haben. (Man vgl. z. B. die asymptotisch wirksamen regulären Schätzfunktionen und die Ungleichung von Cramér-Rao). Man vgl. noch G. Tintner im Journal of the Royal stat. Soc. 1952.

L. Schmetterer, Wien

Einführung in die Algebra. Von *O. Haupt*. Erster Teil. Zweite Auflage. („Mathematik und ihre Anwendungen in Physik und Technik". Herausgegeben von E. Kamke und A. Kratzer:: Reihe A, Band 5.) XVIII, 370 S. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G. 1952. Geb. DM 23.—.

Das Lehrbuch von *Haupt* war das erste Buch, in dem die moderne, abstrakte Algebra in leicht verständlicher und ausführlicher Weise dargestellt wurde. Viele Studierende haben die neue Richtung der Algebra durch dieses Lehrbuch in anregender und gründlicher Weise kennen gelernt. Eine eingehende Würdigung der ersten Auflage erfolgte in dieser Zeitschrift: Mh. Math. 36. 37—39 (1929). Die vorliegende zweite Auflage unterscheidet sich nicht wesentlich von der ersten. Sie enthält mehrere kleine Verbesserungen und neuere Literaturnachweise. Auch heute noch muß dieses Lehrbuch den Studierenden auf das wärmste empfohlen werden.

N. Hofreiter, Wien

Vom periodischen Dezimalbruch zur Zahlentheorie. Von *A. Leman*, bearbeitet von *B. Schoeneberg*. Dritte Auflage. („Mathematisch-physikalische Bibliothek": Reihe 1, Nr. 19.) 60 S. Leipzig: B. G. Teubner. 1952. DM 2.10.

Das unter dem gleichen Titel von *A. Leman* verfaßte Büchlein das seinerzeit von der Kritik lobend beurteilt worden war (vgl. diese Monatsh. Bd. 40 (1933), Literaturber. S. 2), erscheint hier in der Bearbeitung von *B. Schoeneberg* bis auf einige Zusätze und Verbesserungen i. a. in unveränderter Form.

J. F. Lewandowski, Wien

Über Stammfaktoren bei ternären quadratischen Formen. Von *H. Brandt*. (Berichte über die Verhandlungen der sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig; Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse: Band 100, Heft 1.) 24 S. Berlin: Akademie-Verlag. 1952. DM 2.25.

Das Heft befaßt sich mit dem Problem der Bestimmung der Stammfaktoren von ternären quadratischen Formen. Stammfaktoren sind Primzahlen,

die bei verwandten Formen ständig auftreten. (Zwei Formen heißen verwandt, wenn die eine — abgesehen von einem rationalen Faktor — aus der andern durch umkehrbar rationale Transformation hervorgeht.) Das Problem der Stammfaktoren hängt mit dem Problem der Teiler bzw. Nichtteiler einer ternären Form f zusammen. Ist $f \equiv 0 \pmod{p^n}$ für jeden positiven Exponenten lösbar, so heißt p Teiler von f. Alle Primfaktoren, die nicht in der Diskriminante einer ternären Form f aufgehen, sind Teiler von f. Nichtteiler und Stammfaktoren sind identisch. *N. Hofreiter*, Wien

Quadratische Formen und orthogonale Gruppen. Von *M. Eichler*. („Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete". Herausgegeben von *R. Grammel, E. Hopf, F. Rellich, F. K. Schmidt* und *van der Waerden:* Band LXIII.) XII, 220 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1952. DM 24.60.

Die letzte lehrbuchmäßige Darstellung der Arithmetik der quadratischen Formen stammt von *P. Bachmann* und ist schon mehr als dreißig Jahre alt. Die grundlegenden Arbeiten von *H. Hasse, C. L. Siegel* und *E. Witt* haben der Theorie nicht nur neue fundamentale Resultate hinzugefügt, sie haben die Theorie auch wesentlich vereinfacht und die umfangreichen, unübersichtlichen Rechnungen der älteren Darstellungen durch mehr begriffliche Überlegungen ersetzt. Es ist dies der gleiche Vorgang, wie er in der Algebra und Zahlentheorie auftrat. Während bei den letztgenannten Gebieten mehrere lehrbuchmäßige Darstellungen vorliegen, fehlte es an einer modernen Darstellung der arithmetischen Theorie der quadratischen Formen. Nun sind in der letzten Zeit zwei Bücher erschienen, welche eine moderne Darstellung des Gebietes geben. Das eine stammt von *Jones* (The Arithmetic Theory of quadratic Forms, New York 1950) und das zweite ist das hier vorliegende Buch von *Eichler*. Das Buch von *Jones* beschränkt sich mehr auf die elementaren Teile der Theorie und ist in der Darstellung konservativer als jenes von *Eichler*, welches bis zu den Siegelschen Hauptsätzen führt. Grundlegend für den Aufbau des vorliegenden Buches ist die Tatsache, daß jede quadratische Form als metrische Grundform in einem Vektorraum über dem Körper, in welchem die Koeffizienten der Form liegen, aufgefaßt werden kann. Die Bedeutung dieser Tatsache für die Theorie wurde zuerst von *E. Witt* deutlich herausgestellt. Der Verfasser führt nun das Prinzip, daß die Theorie der quadratischen Formen nichts anderes als die Geometrie in einem metrischen Vektorraum über einem Körper ist, konsequent durch. Dabei ergeben sich zwei Aufgaben: 1. Wie wird der Raum durch seine Metrik bestimmt? 2. Wie sieht die Bewegungsgruppe in diesem Raume aus? (Verallgemeinerte orthogonale Gruppe). Der Titel bringt diese beiden Problemstellungen zum Ausdruck.

Dieser geometrisch-gruppentheoretische Standpunkt bewirkt nun einen begrifflich sehr durchsichtigen Aufbau der ganzen Theorie. Er führt in natürlicher Weise zu neuen, vom Verfasser stammenden wichtigen Begriffsbildungen und Resultaten. Ich hebe nur den Begriff des Spinorgeschlechtes hervor, welcher feiner als der Begriff des Geschlechtes ist, aber doch noch von lokaler Art ist, d. h. es kann von zwei quadratischen Formen durch Betrachtung von Systemen von Kongruenzen entschieden werden, ob sie im gleichen Spinorgeschlecht liegen oder nicht. Dies steht im Gegensatz zur Klasseneinteilung, welches das analytische Hilfsmittel der Reduktionstheorie benötigt. Dieser neue Begriff hat es dem Verfasser gestattet, das fundamentale Problem der Theorie anzugreifen, unter welchen Bedingungen die Geschlechtseinteilung

mit der Klasseneinteilung der Formen zusammenfällt. Weiters sei der Beweis des Siegelschen Hauptsatzes hervorgehoben, welcher von dem Originalbeweis in wesentlicher Weise verschieden ist.

Das Buch ist reich an vielen originellen Beweisführungen und Begriffsbildungen. Interessant ist der Beweis des Hasseschen Hauptsatzes, der unter Benützung des Minkowskischen Linearformensatzes geführt wird. In sehr schöner Weise wird die Heckesche Theorie der Operatoren und Modulformen auseinandergesetzt, welche die Zielsetzung dieser Theorie deutlich macht.

Es liegt hier ein hochbedeutsames Werk vor, verfaßt von einem Mathematiker, der zur Theorie der quadratischen Formen selbst wichtige Resultate und Methoden beigetragen hat. Die Darstellung ist sehr klar und wird noch erleichtert von den Bemerkungen, welche der Verfasser den Abschnitten und Beweisen stets vorwegschickt. Die Theorie der quadratischen Formen steht mit vielen Gebieten der Mathematik in so enger Wechselbeziehung, daß dieses Werk in keiner Bibliothek eines Mathematikers fehlen sollte. Die Ausstattung des Buches ist, wie bei allen Büchern dieser Sammlung, ausgezeichnet.

E. Hlawka, Wien

Höhere Mathematik. Von *R. Rothe*. Herausgegeben von *W. Schmeidler*. Teil IV, Heft 5/6. Vierte Auflage. (Teubners Mathematische Leitfäden: Band 37/38.) Mit 59 Textabb., 108 S. Leipzig: B. G. Teubner. 1952. DM 3.40.

Dieses Heft enthält Aufgaben über krumme Flächen, Linienintegrale, mehrfache Integrale und Differentialgleichungen. Damit sind nun auch alle Hefte über Übungsaufgaben in neuer Auflage erschienen. Die Besprechung der dritten Auflage erfolgte in: Mh. Math. **55**, 97—98 (1951). Die vierte Auflage unterscheidet sich durch bessere Ausstattung von der dritten.

N. Hofreiter, Wien

Leçons d'Analyse Fonctionelle. Von *F. Riesz* und *B. Sz.-Nagy*. VIII, 448 S. Budapest: Akadémiai Kiadó. 1952. Ft. 90.—.

Das von der Budapester Akademie erfreulicherweise in französischer Sprache herausgegebene Werk bringt als ersten Teil einen systematischen Aufbau der modernen Integrationstheorie, wie ihn *F. Riesz* in zahlreichen Arbeiten und in seinen Vorlesungen entwickelt hat. Beginnend mit seinem schönen elementaren Beweis des Lebesgue'schen Satzes von der Differenzierbarkeit monotoner Funktionen, führt sein Weg über das mit Hilfe von Treppenfunktionen definierte Lebesgue-Integral rasch zur Funktionenklasse L^2 bzw. L^p. Es folgt die Übertragung der zunächst für Funktionen einer Veränderlichen hergeleiteten Ergebnisse auf Funktionen mehrerer Variablen, sowie die Beschreibung anderer zum Lebesgue-Integral führender Wege und zum Abschluß wird die Theorie der Integrale von Stieltjes-Riemann und Stieltjes-Lebesgue gegeben; auch der allgemeine Integralbegriff von *Daniell* findet Beachtung.

Durch den ersten Teil sind die Grundlagen für den hauptsächlich von *Sz.-Nagy* verfaßten zweiten Teil des Werkes gegeben, der eine auch neueste Ergebnisse berücksichtigende Darstellung der linearen Transformationen und Integralgleichungen einschließlich der Spektraltheorie bringt. Hier wird zunächst die Theorie der Integralgleichung 2. Art einschließlich der klassischen Lösungsmethode von *Fredholm* behandelt, hierauf die aus dem Begriff der Vollstetigkeit entwickelte Methode von *F. Riesz* dargestellt. Nach Anwendungen auf die Randwertaufgaben von *Dirichlet* und *Neumann* werden sodann die Begriffe des Hilbertschen bzw. Banachschen Raumes eingeführt. Die folgenden Entwicklungen beziehen sich auf den Raum von *Hilbert*, doch wurde den Ver-

llgemeinerungen auf Banachsche Räume, soweit solche möglich sind, Rechnung getragen. Zuerst wird die Theorie der vollstetigen symmetrischen Lineartransformationen, dann werden mit Anwendung auf die schwingende Saite bei allgemeinster Massenverteilung und auf die fastperiodischen Funktionen die beschränkten Transformationen im symmetrischen, unitären und „normalen" Fall (Vertauschbarkeit der Transformation mit der adjungierten) entwickelt. Es folgt die Betrachtung nicht-beschränkter Transformationen und zwar wird die Spektraltheorie der selbstadjungierten Transformationen zuerst nach einer Methode von *Riesz* und *Lorch* (1936), dann auch nach der ursprünglichen Methode von *J. v. Neumann* dargestellt. Die letzten Kapitel enthalten die modernste Entwicklung der Theorie: Störungstheorie, spektrale Darstellung von Gruppen unitärer Transformationen, Ergodensätze und schließlich die bisher über allgemeine (d. h. nicht normale) Transformationen vorliegenden Ergebnisse. Eine bibliographische Übersicht und ein Sachregister beschließen das Werk.

Die vorstehende Inhaltsangabe kann naturgemäß nur einen flüchtigen Überblick über die Fülle des verarbeiteten Materials geben, wenn auch, wie ich hoffe, der hervorragende sachliche Wert des Werkes damit genügend betont ist. Wichtiger aber scheint mir noch die Hervorhebung des außerordentlichen methodischen Geschicks, mit dem die Verfasser es verstanden haben, den Leser stets auf dem einfachsten Weg in das sowohl rein mathematisch wie für die Anwendungen wichtige, dabei zum Teil durchaus nicht leicht zugängliche Gebiet zu führen, so daß stets die großen Linien des Aufbaues sichtbar bleiben. Den beiden Autoren sei für die Mühe und Sorgfalt, die sie auf ihr Werk verwendet haben, aufrichtig gedankt. *J. Radon*, Wien

Anfangswertprobleme bei partiellen Differentialgleichungen. Von *R. Sauer*. („Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete". Herausgegeben von *R. Grammel, E. Hopf, F. Rellich, F. K. Schmidt* und *B. L. van der Waerden*; Band LXII.) Mit 63 Textabb., XIV, 229 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1952. DM 26.—, geb. DM 29.—.

Der Verfasser gibt im Vorwort als wesentliches Ziel seines Buches an, dem Physiker und Ingenieur das erforderliche mathematische Rüstzeug an die Hand zu geben, um hyperbolische Anfangswertprobleme bei quasilinearen Differentialgleichungen lösen zu können. Natürlich ist das bei einem Buch beschränkten Umfangs mit beträchtlichen Schwierigkeiten verbunden, die der Verfasser durch geschickte Stoffauswahl und durch möglichste Anschaulichmachung mit Hilfe geometrischer Betrachtungen, sowie durch Heranziehung zahlreicher konkreter Beispiele zu überwinden verstanden hat.

Im ersten, vorbereitenden Kapitel wird zunächst der Unterschied zwischen Anfangswert- und Randwertaufgaben klar gemacht und hierauf die Typeneinteilung der linearen Differentialgleichungen besprochen. Es folgt der *Cauchy-Kowalewska*sche Existenzsatz und die Durchführung des Grenzüberganges von einer Differenzen- zur Differentialgleichung für die einfachste Wellengleichung sowie Beispiele für das Auftreten hyperbolischer Gleichungen in der Gasdynamik und Akustik. Das zweite Kapitel behandelt die partielle Differentialgleichung erster Ordnung und bietet Gelegenheit, den Charakteristikenbegriff in seiner einfachsten Erscheinungsform vorzuführen. Im dritten Kapitel wird der Hauptgegenstand, die Anfangswertaufgaben bei hyperbolischen Differentialgleichungen 2. Ordnung, im Fall zweier unabhängiger Veränderlicher, ausführlich behandelt. Dabei wird der von *Friedrichs* und *Lewy* (Math. Ann. 99) gegebene Ausbau der Charakteristikentheorie zugrundegelegt. Zuerst

wird ein System von quasilinearen Gleichungen, dann die lineare Gleichung sowohl mit der Differenzenmethode als auch durch schrittweise Näherung behandelt, worauf Anwendungen auf die Flächentheorie, die Gasdynamik und einige weitere physikalische Probleme folgen. Dann wird die Behandlung der allgemeinen hyperbolischen Gleichung 2. Ordnung kurz angedeutet und für die pseudolineare sowie die *Monge-Ampère*sche Gleichung durchgeführt. Es folgen Sätze über die Fortpflanzung von Unstetigkeiten und die *Riemann*sche Integrationsmethode mit Anwendung auf die Gasströmung. Das letzte Kapitel bringt dann einiges über Gleichungen mit mehr als zwei unabhängigen Veränderlichen und zwar die Grundbegriffe über charakteristische Flächen und Bicharakteristiken, illustriert dann am Beispiel der Wellengleichung den Unterschied zwischen gerader und ungerader Variablenzahl und enthält ferner einen Abriß der Integrationstheorie von *Hadamard* sowie zahlreiche Anwendungen.

Das Werk des Verfassers, der in vorbildlicher Weise die Kenntnis der Theorie mit Verständnis für die Bedürfnisse der Praxis vereint, wird sicher bei dem Leserkreis, für den es bestimmt ist, die verdiente Würdigung finden. Aber auch der reine Mathematiker wird daraus mancherlei Anregung für Forschung und Lehre schöpfen. *J. Radon*, Wien

Zur Gültigkeit des Huygens'schen Prinzipes bei partiellen Differentialgleichungen vom normalen hyperbolischen Typus. Von *P. Günther*. (Berichte der Sächsischen Akademie der Wissenschaften; Mathematisch-Naturwissenschaftliche Klasse: Band 100, Heft 2.) Berlin: Akademie-Verlag. 1952. DM 5.—.

Diese Arbeit beschäftigt sich mit der Aufstellung notwendiger Bedingungen für die Gültigkeit des Huygens'schen Prinzipes für diejenige Klasse von hyperbolischen partiellen Differentialgleichungen, die *Hadamard* normal nennt. *Hadamard* vermutete, daß sich alle diese durch gewisse einfache Transformationen auf die Wellengleichung transformieren lassen, sobald das Huygens'sche Prinzip für sie gilt. Der Fall einer Gleichung von vier Variablen mit konstanten Koeffizienten der zweiten Ableitungen wurde von *Mathisson* vollständig gelöst und die vorliegende Arbeit baut auf seinen Ergebnissen auf, um das Problem bei variablen Koeffizienten anzugreifen. *K. Prachar*, Wien

The Science of Chance. From Probability to Statistics. Von *H. C. Levinson*. Mit III Textabb., 304 S. London: Faber and Faber Limited. 1952. Geb. 30 s. net.

Das Buch stellt eine flüssig geschriebene Plauderei über Wahrscheinlichkeit und Statistik dar. Die Grundtatsachen der Wahrscheinlichkeitsrechnung werden an Glücksspielen erläutert. Die Ausführungen sind so gehalten, daß mathematische Vorkenntnisse absolut unnötig sind. Fehlerquellen primitiver statistischer Auswertungen werden mit großer Sachkenntnis und nicht mißzuverstehender Deutlichkeit beschrieben, wie denn überhaupt die eigentliche Stellung der Statistik ausgezeichnet geschildert ist. Wir wollen es uns nicht versagen, einen treffenden Satz (S. 284) in sinngemäßer Übersetzung wiederzugeben: „Es ist Tatsache, daß die Mehrzahl derjenigen, welche sich als Statistiker bezeichnen, gänzlich unfähig sind, ein modernes statistisches Werk zu lesen und zu verstehen". Man wird dem hübschen Buch einen breiten Leserkreis wünschen. *L. Schmetterer*, Wien

The Design and Analysis of Experiments. Von *O. Kempthorne*. XIX, 631 S. New York: Wiley & Sons, Inc. — London: Chapman & Hall Ltd. 1952.

Das Planversuchswesen — könnte man sagen — soll dem Experimentator Mittel an die Hand geben, das ökonomische Prinzip: bei möglichst geringem Aufwand ein Maximum an Information zu erzielen, in die Tat umzusetzen. Die Grundlagen hiezu gehen im allgemeinen auf *Fisher* und *Yates* zurück. Die letzten Jahre haben sowohl nach der methodisch-mathematischen Seite als auch nach der empirisch-experimentellen Seite hin eine wesentliche Bereicherung gebracht. Die Beiträge sind jedoch in zahlreichen Zeitschriften zerstreut und oft sehr schwer zugänglich. Eine geschlossene Darstellung unter Berücksichtigung dieser Fortschritte muß daher als sehr erwünscht angesehen werden. Dieser nicht einfachen und dankenswerten Aufgabe hat sich der Verf. unterzogen und zwar in einer Weise, welche einen sehr großen Leserkreis zufriedenstellen soll, vom Mathematiker angefangen bis zu demjenigen, der nur an der Ausführung des Experimentes interessiert ist. Es ist natürlich unvermeidlich, daß bei so weitgespannten Intentionen manche Spezialwünsche unterdrückt werden müssen. Der bewußte Verzicht auf sequential-Methoden und die Ergebnisse der modernen Entscheidungstheorie sowie die stellenweise geübte Zurückhaltung in formaler Hinsicht gehen zu Lasten des Mathematikers. Anderseits wird der mathematisch unbekümmerte Empiriker erkennen müssen, daß es keinen Königsweg zu einer vollen Beherrschung der Materie gibt.

In stofflicher Hinsicht ist wohl eine gewisse Vollständigkeit erreicht. Damit ist mehr gesagt, als wenn wir einzelne Abschnitte hervorheben, wie den ganzen Fragenkreis der Varianzanalyse, das Prinzip der Zufallsherstellung, eine systematische Studie des faktoriellen Versuches u. a. Den Mathematiker wollen wir noch besonders auf die Untersuchungen der lateinischen Quadrate und deren Verallgemeinerungen vermöge der Theorie der Körper der Charakteristik p hinweisen, die vielfach auf die indische Schule (*Bose*) zurückgehen. Hinweise auf die hübsche Arbeit von *Erdös* und *Kaplansky* (Amer. Journ. of Math. 1946) über die Anzahl lateinischer Rechtecke hätten hier ebenfalls ihren Platz finden können. Wir heben noch die Behandlung der fractional replication hervor (eine anerkannte Übersetzung des Begriffes scheint noch zu fehlen), wo es sich im wesentlichen um die Frage der Auswertung unvollständiger faktorieller Experimente handelt. Interessante Beiträge hiezu gehen auf den Verf. zurück, z. B. Anwendungen auf das Problem des Wiegens.

Es bleibt noch übrig, dem Verf. Dank zu sagen für die Sammlung und Ordnung des zahlreichen Materials und die klare und systematische Darstellung, die gerade in dieser Sparte sich nicht bei allen Autoren vorfindet.

L. Schmetterer, Wien.

Einführung in die politische Arithmetik (Finanz-Mathematik). Von *A. Wolf*. VI, 218 S. Wien: F. Deuticke-Hölder-Pichler-Tempsky. — Manzsche Verlagsbuchhandlung; Österreichischer Bundesverlag; Verlag für Jugend und Volk. 1951. S 48.—.

Wie aus dem Titel zu erwarten ist, handelt das Buch von Zinseszinsenrechnung, Annuitätenrechnung (Schuldtilgung), Kursrechnung und Rentabilität. Es ist zum Gebrauch an Handelsakademien in Österreich zugelassen. Als Schullehrbuch ist der mathematische Inhalt im Vergleich zum Umfang klarerweise dürftig. Die Darstellung ist breit und leicht verständlich. Es werden sehr viele Spezialfälle betrachtet. Das Wertvollste ist die Fülle der lebensnahen Aufgaben. Wer alle Aufgaben durchrechnet, hat sich wirklich gründlich mit der Materie vertraut gemacht. Meiner Meinung nach soll man vom Schüler nicht verlangen, sich die vielen Symbole zu merken und mit deren Hilfe die Aufgaben durchzurechnen.

N. Hofreiter, Wien

Theorie der geometrischen Konstruktionen. Von *L. Bieberbach.* 162 S., 102 Fig. (Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften; Mathematische Reihe: Band 13.) Basel: Verlag Birkhäuser. 1952. sfr. 15.60.)

Mit Recht weist der Verfasser in der Einleitung auf den großen Reiz hin, den die Konstruktionsaufgaben zu allen Zeiten auf den Mathematiker ausgeübt haben. Man kann sicher sein, daß dieses Buch viel dazu beitragen wird, diesen Reiz noch zu erhöhen und zu neuen Fragestellungen anzuregen. Der Stoff ist nach den Hilfsmitteln geordnet, die bei der Konstruktion zugelassen sind. Aus der großen Anzahl der Problemstellungen greifen wir nur einige heraus: Konstruktionen mit Lineal allein, mit Zirkel allein, mit Winkellineal, mit fester Zirkelöffnung, mit Lineal nach Vorgabe eines festen Kreises, mit dem Rechtwinkelhaken, dem Kissoidenzirkel und vieles andere. Besonders klar werden die Probleme der Dreiteilung des Winkels und der Konstruktion regelmäßiger Polygone behandelt. Sogar der Transzendenzbeweis von e und π wird gebracht und zwar mit der Methode von *Gelfond*. Auch diese schwierigen Dinge sind sehr verständlich dargestellt und der Verfasser ist bemüht, überall mit geringen Vorkenntnissen auszukommen. Einige Grundtatsachen der projektiven Geometrie und der Differentialrechnung und beim Transzendenzbeweis einiges wenige aus der Funktionentheorie genügen vollständig zum Verständnis. Obwohl das Buch auch dem Fachmann vieles bieten wird, wendet es sich hauptsächlich an den interessierten Laien und den Studierenden der Mathematik, der nur zu oft vergeblich Auskunft über ihn interessierende Fragen dieser Art sucht.

K. Prachar, Wien

Das delische Problem (Die Verdopplung des Würfels). Von *W. Breidenbach.* Zweite Auflage. („Mathematisch-physikalische Bibliothek": Reihe I, Nr. 68.) 59 S. Leipzig: B. G. Teubner. 1952. DM 2.30.

Das vorliegende Büchlein ist die zweite stark geänderte Auflage des Bändchens von *Herrman*, der verschollen ist. Es wird mit einer geschichtlichen Einleitung begonnen. Dann folgen exakte Lösungen durch Einschiebung (*Apollonius* von Perga, *Newton*, *Plato*, *Eratosthenes*); exakte Lösungen durch Kegelschnitte (*Menächmus*, *Sluse* u. a.); exakte Lösungen durch höhere Kurven (Konchoide des *Nikomedes*, Zissoide des *Diokles*, u. a.). Dann werden mehrere Näherungslösungen mit Zirkel und Lineal besprochen.

Der zweite Teil, der ganz auf das Konto von *W. Breidenbach* geht, enthält den Unmöglichkeitsbeweis der exakten Lösung mit alleiniger Benützung von Zirkel und Lineal. Dieser Beweis erfordert ziemlich lange Vorbereitungen und dürfte wohl nur den besten Schülern der Oberklassen zugänglich sein. I. a. schließt sich das Büchlein sehr gut in den Rahmen der Sammlung ein. Seine Lektüre ist unter anderem auch jenen mathematischen Laien zu empfehlen, welche auch heute noch mit unzureichenden Kenntnissen an einer elementaren Lösung des Problems arbeiten und von Anfang an zu einem Mißerfolg verurteilt sind.

J. F. Lewandowski, Wien

Herausgeber, Eigentümer und Verleger: Springer-Verlag, Wien I., Mölkerbastei 5. - Für den Inhalt verantwortlich: Prof. Dr. Nikolaus Hofreiter, Wien IV., Schelleingasse 39. - Druck: Tiroler Graphik, Ges.m.b.H., Innsbruck, Innrain 27—29.

SPRINGER-VERLAG IN WIEN

Soeben erschien:

Inhalt und Maß

Von

Karl Mayrhofer

ord. Univ.-Prof. der Mathematik, wirkl. Mitglied der Österreichischen Akademie der Wissenschaften in Wien

Mit 17 Figuren. VIII, 269 Seiten. 1952

S 180.—, DM 36.—, $ 8.60, sfr. 37.—; Ganzleinen S 195.—, DM 39.—, $ 9.30, sfr. 40.—.

Das Buch entwickelt die klassische und moderne Theorie der Inhalte und Maße. Daneben werden mannigfache spezielle Probleme behandelt. Zahlreiche Sätze sind von entbehrlichen Voraussetzungen gelöst oder neu aufgestellt, Beweise verschiedentlich verbessert oder neu geführt worden. Ein in sich geschlossener Abschnitt stellt die notwendigen Hilfsmittel für das Rechnen mit abstrakten Mengen (Somen) zusammen; dieser Abschnitt ist von allgemeinem Interesse. Besondere Vorkenntnisse werden nicht vorausgesetzt, wohl aber eine gewisse Gewandtheit im abstrakten Denken. Das Buch wendet sich an jeden mathematisch interessierten Leser.

Inhaltsverzeichnis

Abstrakte Inhalte und Maße. Hilfsmittel aus der Mengenlehre. Additive Inhalte. Volladditive Inhalte und Maße. Maßgleiche Hüllen und Kerne. Vollständige Inhalte und Maße. Vervollständigung eines Inhaltes und eines Maßes. Erweiterung eines volladditiven Inhaltes zu einem Maße. Kriterien für die j-Meßbarkeit. Inhalt und Maß in Produkträumen.

Der Jordan'sche Inhalt. Der elementare Inhalt der Würfelaggregate. Der n-dimensionale *Jordan*sche Inhalt. Überdeckende Zellensysteme. Inhalt spezifischer Gebilde.

Das Borel'sche und das Lebesgué'sche Maß. Das *Borel*sche Maß. Das *Lebesgue*sche Maß. Nicht nach *Lebesgue* meßbare Mengen. Der Überdeckungssatz von *Vitali*. Dichte einer Punktmenge.

Transformation von Inhalt und Maß. Lineare Transformationen. Transformation von Inhalt und Maß. Inhalt und Maß elementarer Gebilde.

Theorie der äußeren Maße. Äußere und innere Maße. Die Außenfunktion der $k\sigma$-Erweiterung eines volladditiven Inhaltes als äußeres Maß.

Verbände und Somenfunktionen. *Boole*sche Verbände. Isomorphieen und Homomorphieen. Somenfunktionen. Anhang: *Borel*sche Mengen. Namen- und Sachverzeichnis.

Zu beziehen durch jede Buchhandlung